UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Faculté des Sciences Appliquées

Méthodes analytiques pour la correction d'atténuation en tomographie tridimensionnelle par émission monophotonique

Jean-Marc Wagner

Ingénieur Civil Électricien (Électronicien)

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences Appliquées

Année académique 2001-2002

Remerciements

Je voudrais en premier lieu exprimer toute ma gratitude à Marc Van Droogenbroeck, Professeur à l'Université de Liège et promoteur de cette thèse, pour son aide et son soutien tout au long de ces trois années de recherche et lors de la rédaction de cet ouvrage. Je le remercie également pour sa confiance.

Je tiens à présent à remercier Frédéric Noo de m'avoir fait découvrir et apprécier l'univers passionnant de la tomographie. Il a toujours su me guider dans l'orientation de mes recherches et était toujours présent dans les moments difficiles tant au niveau moral que scientifique. Ses compétences scientifiques n'ont d'égal que sa modestie. Plus qu'un simple collègue, il est également devenu mon ami.

Grâce à Frédéric Noo, j'ai eu la chance de rencontrer Michel Defrise et Rolf Clackdoyle, tous deux scientifiques confirmés dans le domaine de la reconstruction d'images. Les discussions que j'ai eues avec Michel Defrise ainsi que ses nombreux conseils m'ont toujours été d'une aide précieuse. En juillet 2000, j'ai accompli un séjour au Medical Imaging Research Laboratory de l'Université d'Utah où j'ai pu entreprendre une collaboration avec le Professeur Rolf Clackdoyle. Michel et Rolf ont ainsi grandement contribué à mon épanouissement scientifique. Je les remercie pour leur sympathie et les prie de trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont, de près ou de loin, participé à l'élaboration de ce document. Je pense au Professeur Pierre Wolper, à Frédéric Fourré, Fabian Lapierre, Jean-Marc François, Claude Diepart et bien sûr à mon épouse Nathalie. Je remercie également Pierre Geurts, Ibtissam Elkhayat, Nathalie Peters, Damien Ernst, Michel Rigo et tous ceux qui, par un simple mot ou geste, m'ont encouragé au cours de ces trois dernières années.

J'aurai à présent une pensée particulière pour mon épouse Nathalie, ma fille Laurence ainsi que mes parents. Je leur dédie cette thèse, ainsi qu'au petit bout qui grandit en ce moment même dans le ventre de Nathalie.

Enfin, je remercie les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail. Que les Professeurs Jacques Destiné et François-Xavier Litt de l'Université de Liège trouvent ici l'expression de ma gratitude. Je suis également très honoré que le Docteur Pierre Grangeat, Expert Senior au CEA (Grenoble), ait accepté de participer à mon jury.

Finalement, je remercie Willy Legros, Recteur de l'Université de Liège et le Fonds National de la Recherche Scientifique pour les différents subsides qu'ils m'ont octroyés ces deux dernières années afin que je puisse participer aux congrès importants dans le domaine.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Transformées rayons X atténuée et exponentielle **11**
2.1 Transformée de Radon atténuée 11
2.1.1 Définition 11
2.1.2 Note bibliographique 12
2.1.3 Conversion en données exponentielles 14
2.2 Transformée de Radon exponentielle 15
2.2.1 Définition 16
2.2.2 Inversion 17
2.2.3 Coefficients d'atténuation particuliers 22
2.3 Transformée rayons X atténuée 25
2.3.1 Définition 25
2.3.2 Conversion en données exponentielles 26
2.4 Transformée rayons X exponentielle 27
2.4.1 Définition 27
2.4.2 Introduction au problème de l'inversion 28
2.4.3 Inversion "pseudo-3D" 31

3 Acquisition sur un demi-cercle **33**
3.1 Motivation 34
3.2 Algorithme de reconstruction 35
3.2.1 Cas général 36
3.2.2 Cas particulier important 39
3.3 Dérivation de l'algorithme 39
3.3.1 Une équation intégrale pour f 40
3.3.2 Formule de reconstruction 47
3.4 Vérification de la méthode 50
3.4.1 Détails d'implémentation 50
3.4.2 Reconstructions 54
3.4.3 Fonctions de transfert 55

4 Acquisition sur une union de grands cercles **59**
4.1 Motivation . . . 59
4.2 Algorithme EXP-TTR . . . 61
4.2.1 Formulation FBP . . . 62
4.2.2 Expression fréquentielle du filtre de convolution . . . 66
4.3 Géométries particulières . . . 67
4.3.1 La sphère complète . . . 67
4.3.2 La bande équatoriale . . . 70
4.4 Vérification de la méthode . . . 75
4.4.1 Détails d'implémentation . . . 75
4.4.2 Reconstructions . . . 81
4.4.3 Fonctions de transfert . . . 81

5 Synthèse de projections parallèles exponentielles **87**
5.1 Algorithme de synthèse . . . 88
5.1.1 Hypothèses de travail . . . 88
5.1.2 Objectif . . . 89
5.1.3 Définitions . . . 90
5.1.4 Méthode de synthèse . . . 91
5.2 Un cas particulier important : un cercle de S^2 . . . 95
5.2.1 Définitions . . . 96
5.2.2 Étude du comportement numérique de la méthode de synthèse 96
5.3 Vérification de la méthode . . . 103
5.3.1 Détails d'implémentation . . . 106
5.3.2 Reconstructions . . . 108
5.3.3 Influence du paramètre N_ϕ . . . 112
5.3.4 Échantillonnage non-uniforme sur le cercle . . . 115
5.4 Algorithme des directions ordonnées . . . 115
5.4.1 Détails d'implémentation . . . 119
5.4.2 Reconstructions . . . 119

6 Acquisition en géométrie RSH **123**
6.1 Motivation . . . 124
6.2 Définition de la géométrie RSH . . . 127
6.3 Algorithme de reconstruction . . . 128
6.3.1 Condition nécessaire et suffisante d'inversion . . . 129
6.3.2 Méthode d'inversion . . . 132
6.4 Géométries RSH particulières . . . 132
6.4.1 N cercles couvrant 360° . . . 132
6.4.2 N cercles couvrant 180° . . . 134
6.4.3 N cercles couvrant $(180 + \Delta)^\circ$ . . . 135
6.5 Vérification de la méthode . . . 137
6.5.1 Détails d'implémentation . . . 138

6.5.2 Reconstructions 143
6.5.3 Fonctions de transfert 144

7 Expérience avec données réelles 149
7.1 Description de l'expérience 149
7.1.1 Le scanner 149
7.1.2 Le fantôme 151
7.1.3 Les projections 152
7.1.4 La géométrie RSH considérée 156
7.2 Reconstructions 156
7.2.1 Sans atténuation 157
7.2.2 Avec atténuation mais sans correction d'atténuation 158
7.2.3 Avec atténuation et correction d'atténuation 158

8 Conclusions et perspectives 163

A Formules et rappels mathématiques 167
A.1 Transformée de Fourier 167
A.2 Notions d'analyse fonctionnelle 167
A.2.1 Produit scalaire et norme 168
A.2.2 Convergence d'une suite 168
A.2.3 Opérateur linéaire 168
A.3 Théorème de Cauchy 169

B Démonstrations 171
B.1 Convergence de la séquence $K_n\psi = \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi)$ 171
B.2 Calcul de la fonction $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ 173

C Notes sur les tests des algorithmes 179
C.1 Description du fantôme utilisé pour la vérification des algorithmes . . 179
C.2 Fonctions de transfert des algorithmes 179

Notations

$\mathbb{R}^n$	Espace des nombres réels de dimension n
$\mathbb{C}^n$	Espace des nombres complexes de dimension n
j	Nombre complexe purement imaginaire $\sqrt{-1}$
z^*	Complexe conjugué du nombre complexe z
$\underline{x}$	Vecteur ou point de $\mathbb{R}^n$

$\underline{\theta}$	Vecteur unitaire caractérisant la direction des trous du collimateur
$a(\underline{x})$	Carte d'atténuation
$f(\underline{x})$	Carte d'émission
Ω_f	Domaine convexe de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ contenant le support de f
$\chi(\underline{x})$	Fonction caractéristique de l'ensemble Ω_f
$p_a(\underline{\theta}, .)$	Projection parallèle atténuée de f de direction $\underline{\theta}$
$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, .)$	Projection parallèle exponentielle de f de direction $\underline{\theta}$
Ω	Ensemble des vecteurs $\underline{\theta}$ définissant la géométrie d'acquisition

μ_0	Coefficient d'atténuation constant
$\mu(.)$	Coefficient d'atténuation dépendant de l'angle
$\mu'(.)$	Dérivée de la fonction $\mu(.)$
$\overline{\mu}$	Coefficient d'atténuation normalisé égal à $\mu/2\pi$
$\widehat{\mu}$	Coefficient d'atténuation normalisé égal à μ/μ_0
μ_1	Coefficient d'atténuation d'une projection parallèle exponentielle synthétisée
$\mu_2(.)$	Coefficient d'atténuation apparaissant dans la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles
$\mu_d(.)$	Coefficient d'atténuation apparaissant dans la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles

$\mathcal{R}_a$	Transformée de Radon atténuée
$\mathcal{R}_{\mu_0}$	Transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante μ_0
$\mathcal{R}_\mu$	Transformée de Radon exponentielle avec atténuation μ dépendant de l'angle
$\mathcal{R}_0$	Transformée de Radon
$\mathcal{X}_a$	Transformée rayons X atténuée
$\mathcal{X}_{\mu_0}$	Transformée rayons X exponentielle avec atténuation constante μ_0
$\mathcal{X}_0$	Transformée rayons X
$\mathcal{F}_n$	Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{F}_n^{-1}$	Transformée de Fourier inverse dans $\mathbb{R}^n$
$k_{\mu_0}(.)$	Réponse impulsionnelle du filtre 1D apparaissant dans la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante μ_0
$k_\mu(.)$	Réponse impulsionnelle du filtre 1D apparaissant dans la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation μ dépendant de l'angle
$k_0(.)$	Réponse impulsionnelle du filtre 1D apparaissant dans la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon
$h_{\mu_0}(\underline{\theta}, .)$	Réponse impulsionnelle du filtre 2D apparaissant dans la formule FBP de la méthode EXP-TTR
$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, .)$	Transformée de Fourier 2D de $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, .)$
$\delta_n(.)$	Distribution delta de Dirac dans $\mathbb{R}^n$
$\otimes_n$	Convolution dans $\mathbb{R}^n$
$L^1(E)$	Ensemble des fonctions intégrables sur le domaine E de $\mathbb{R}^n$
$L^2(E)$	Ensemble des fonctions de carré intégrable sur le domaine E de $\mathbb{R}^n$
(f_1, f_2)	Produit scalaire des fonctions f_1 et f_2
$\|f\|$	Norme de la fonction f
$\|K\|$	Norme de l'opérateur K
$K^\#$	Adjoint de l'opérateur K
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs unitaires définissant une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$
$\underline{a}.\underline{b}$	Produit scalaire entre les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$
$\underline{a} \times \underline{b}$	Produit vectoriel entre les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$
$\|\underline{a}\|$	Norme du vecteur $\underline{a}$
S^2	Sphère unitaire de $\mathbb{R}^3$
$\Pi_{\underline{\theta}}$	Plan perpendiculaire au vecteur unitaire $\underline{\theta}$ et passant par l'origine de S^2
$\mathcal{C}(\underline{n})$	Grand cercle de la sphère unitaire orthogonal au vecteur unitaire $\underline{n}$
$C(\underline{c}, \gamma)$	Cercle de S^2 de centre $\underline{c}$ et d'ouverture angulaire 2γ
$I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$	Intérieur convexe du cercle $C(\underline{c}, \gamma)$
I^c_Ω	Intérieur convexe d'un ensemble Ω du type RSH

Chapitre 1

Introduction

Le sujet de cette thèse est la ***reconstruction*** d'images tridimensionnelles à partir de ***projections parallèles exponentielles*** pour différentes ***géométries d'acquisition***. Ce problème mathématique trouve son application principale en imagerie médicale, et en particulier en imagerie nucléaire par ***émission monophotonique*** avec ***correction d'atténuation analytique*** sous l'hypothèse que l'***atténuation*** est ***connue*** et ***constante*** sur la région d'émission. Autant de termes qui méritent un certain nombre d'explications.

Dans un premier temps, nous allons décrire les principes de l'imagerie nucléaire, et plus particulièrement de l'imagerie par émission monophotonique. De ces principes découlera une description de l'acquisition des projections parallèles, données du problème de reconstruction, par le scanner. Cela nous conduira à la présentation d'un modèle analytique des mesures basé sur la prise en considération du phénomène d'atténuation, principal élément perturbateur en imagerie par émission monophotonique. Après avoir introduit le problème mathématique étudié, nous fournirons un plan détaillé de cet ouvrage.

Principes de l'imagerie nucléaire

Mis à part le principe physique sur lequel ils sont basés, les différents modèles de scanner existants se distinguent par le type d'information qu'ils fournissent. Contrairement aux scanners à rayons X, qui fournissent une information du type *anatomique*, les scanners en imagerie nucléaire fournissent une information dite *fonctionnelle*. Le principe de l'imagerie nucléaire consiste à administrer au patient un produit radioactif qui va se fixer de manière préférentielle dans l'organe à étudier (cœur, cerveau, ...). La distribution spatiale de la concentration de ce radioélément, souvent appelé *traceur radioactif*, indique l'état fonctionnel local des tissus, comme par exemple leur degré d'irrigation sanguine ou encore leur capacité de fixation du radioélément. C'est pourquoi la connaissance de cette distribution tridimensionnelle[1] fournit une image

[1]Tout au long de cet ouvrage, la notation 3D sera utilisée pour décrire le caractère tridimensionnel d'une quelconque entité.

fonctionnelle de l'organe étudié. Lors d'un examen cardio-vasculaire par exemple, il est ainsi possible de localiser et d'estimer l'étendue de zones mal irriguées du muscle cardiaque, dont l'aggravation aboutit à l'infarctus. Celles-ci se traduisent par une hypofixation, voire une absence de fixation du traceur et donc, par une intensité plus faible ou nulle dans l'image.

Le but en imagerie nucléaire est de déterminer –nous dirons plutôt ***reconstruire***– une image précise de la distribution spatiale du traceur radioactif. Dans la suite, nous noterons $f(x, y, z)$ la concentration du traceur en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. On distingue deux techniques de reconstruction en imagerie nucléaire :

- la tomographie par ***émission monophotonique*** (SPECT, de l'anglais *Single Photon Emission Computed Tomography*), où le radioélément émet des photons gamma dans toutes les directions de l'espace,
- la tomographie par *émission de positons* (PET, de l'anglais *Positon Emission Tomography*), où le radioélément émet des positons qui, par annihilation avec un électron, créent chacun deux photons gamma émis dans des directions opposées. Des informations détaillées sur l'imagerie PET sont fournies à la référence [3].

La seule information accessible sur la distribution spatiale du traceur –et donc les données du problème de reconstruction– est fournie par le scanner. Les photons gamma émis par le radioélément sont détectés par une caméra sensible au rayonnement gamma, appelée par la suite gamma caméra[2], équipée d'un collimateur. Placé devant la caméra, le collimateur est une plaque en plomb ou en tungstène percée d'un réseau régulier de trous laissant passer les photons incidents selon une direction privilégiée. Les photons gamma non absorbés par le collimateur, ou encore *sélectionnés* par le collimateur, atteignent la surface de la caméra où ils sont comptabilisés par un système électronique.

L'image mesurée par la caméra constitue une image 2D de la distribution spatiale 3D du traceur. Si tous les trous du collimateur sont parallèles entre eux –on parle alors de *collimateur à trous parallèles*–, cette image constitue une ***projection parallèle*** *de* $f(x, y, z)$. La figure 1.1 illustre la notion de projection parallèle. Sur cette figure, le vecteur unitaire $\underline{\theta}$ indique la direction de propagation des photons gamma au travers du collimateur. Idéalement, seuls les photons émis dans la direction $\underline{\theta}$ sont détectés. Par la suite, nous dirons que $\underline{\theta}$ est la *direction* de la projection parallèle.

Géométrie d'acquisition des projections

La mesure d'une seule projection ne suffit pas pour réaliser l'imagerie 3D du corps étudié car elle n'en constitue en fait qu'une simple radiographie. Aussi, lors d'un exa-

[2] Dans la littérature, elle est également appelée caméra d'Anger du nom de son inventeur [1].

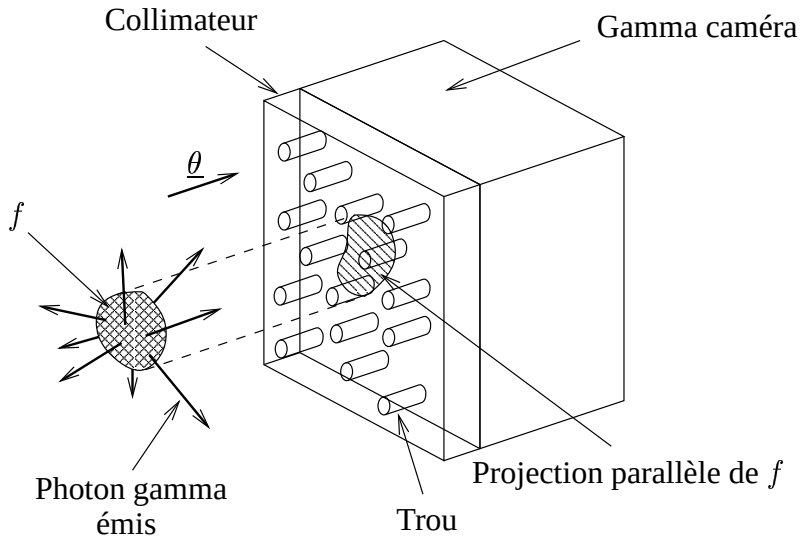


FIG. 1.1 – Illustration d'une projection parallèle de f. Pour une meilleure visualisation, le collimateur est représenté en transparence. Le vecteur unitaire $\underline{\theta}$ indique l'orientation des trous dans le collimateur.

men médical, un ensemble de projections est acquis en déplaçant la caméra d'Anger en différentes positions autour du corps étudié. L'ensemble des vecteurs unitaires $\underline{\theta}$ pour lesquels les projections sont mesurées définit la ***géométrie***, ou encore la ***trajectoire d'acquisition*** des projections et sera noté Ω tout au long de cet ouvrage. Dans la suite, la notion de sphère unitaire, notée S^2, est couramment utilisée. Il s'agit de l'ensemble de toutes les directions, ou vecteurs unitaires, possibles de $\mathbb{R}^3$. Géométriquement, S^2 peut être vue comme une sphère de rayon unitaire centrée au point $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. L'ensemble Ω est donc toujours un sous-ensemble de S^2.

Classiquement, la caméra d'Anger munie d'un collimateur à trous parallèles est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe du lit du patient, le vecteur $\underline{\theta}$ décrivant, au cours de l'examen, un grand cercle[3] de S^2. Dans la suite, nous parlerons de cette géométrie comme de la géométrie SPECT conventionnelle. Celle-ci est illustrée à la figure 1.2.

Remarquons que d'autres types de collimateur existent, notamment ceux à géométrie convergente en éventail ou conique [29]. Pour l'imagerie de petits organes tels que le cœur ou le cerveau, les collimateurs convergents ont l'avantage de créer un effet de grossissement en augmentant la taille de la projection sur le détecteur. L'utilisation de tels collimateurs permet d'améliorer la résolution spatiale de l'image reconstruite sans devoir diminuer la taille des trous du collimateur, ce qui maintient inchangé le

[3]Par grand cercle de la sphère unitaire, on entend un cercle de $\mathbb{R}^3$ de rayon unitaire dont le centre coïncide avec le centre de S^2.

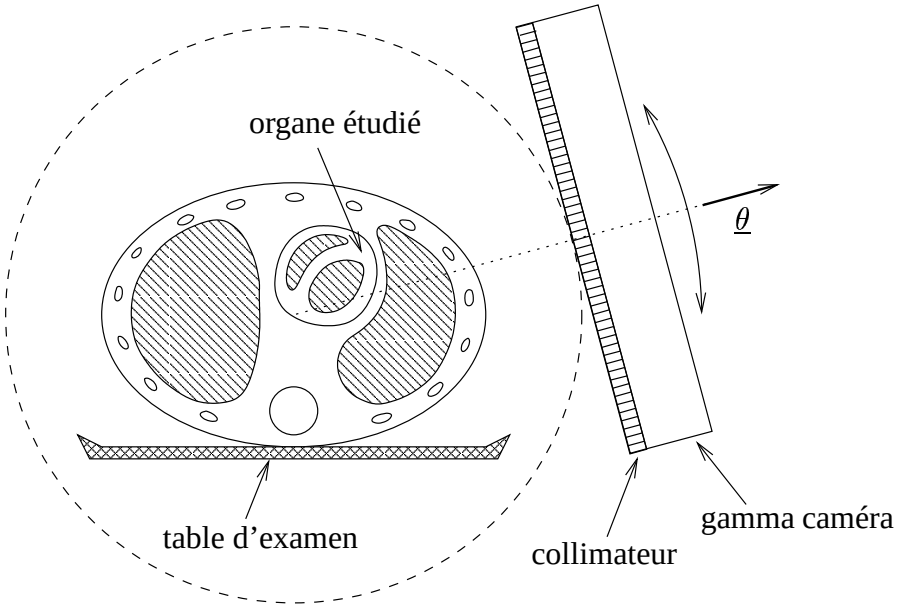


FIG. 1.2 – Illustration de la géométrie d'acquisition SPECT conventionnelle. La caméra d'Anger subit une rotation autour de l'axe du lit du patient. L'organe étudié ici est le cœur.

rapport signal sur bruit dans les mesures. Plus d'informations à ce sujet sont fournies à la référence [29]. La figure 1.3 compare les deux types de collimateur convergent par rapport au collimateur à trous parallèles conventionnel. Néanmoins, la conception de collimateurs convergents est assez délicate vu la difficulté technique de focaliser correctement les directions des différents trous vers un point particulier de l'espace. Pour ces deux géométries convergentes particulières, le terme projection parallèle n'est plus adéquat car tous les trous du collimateur ne sont plus parallèles entre eux. Il s'agit en fait de projections en éventail ou coniques.

Une variante au collimateur à trous parallèles conventionnel a été étudiée dès le début des années 70 [49, 50]. Il s'agit du *collimateur rotatif à trous obliques* (de l'anglais *rotating slant-hole* ou encore RSH). Ce collimateur est similaire à celui à trous parallèles conventionnel à la différence que la direction des trous présente un certain angle γ avec la normale au collimateur. De plus, le collimateur à trous parallèles conventionnel est fixe par rapport à la caméra tandis qu'un collimateur RSH subit une rotation autour de son axe. Dans les années 80, de nombreux chercheurs se sont intéressés à ce collimateur et une avancée considérable dans son développement fut l'apparition du collimateur RSH à plusieurs segments permettant l'acquisition simultanée de plusieurs projections parallèles (2 ou 4 selon le nombre de segments) [6, 7, 8, 9, 51]. Un segment est une région du collimateur où tous les trous sont parallèles entre eux, deux trous appartenant à des segments différents étant non-parallèles. Les figures 1.4a et 1.4b permettent de comparer un collimateur RSH à 2 segments au collimateur à trous

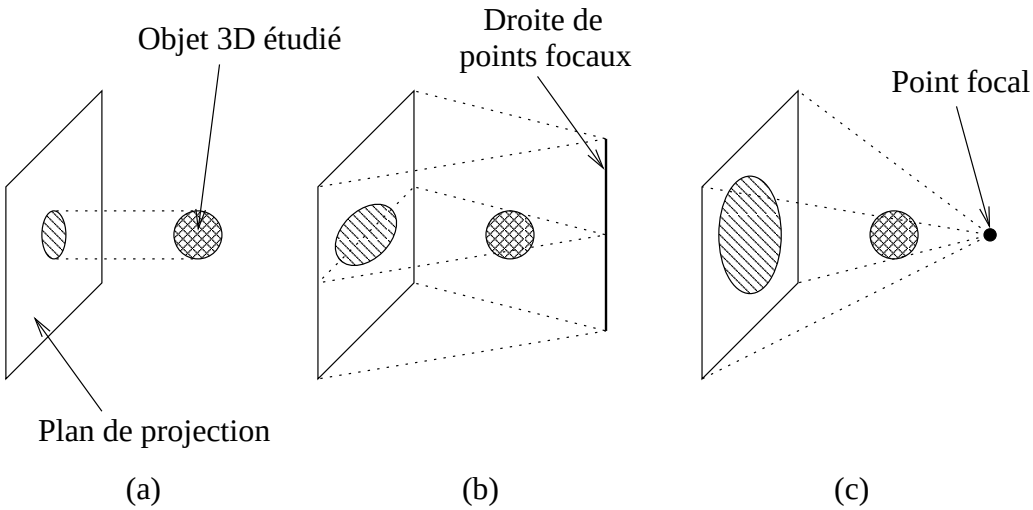


FIG. 1.3 – (a) Collimateur à trous parallèles conventionnel (les “rayons” gamma sont parallèles entre eux). (b) Collimateur à géométrie en éventail (les “rayons” gamma constituent un faisceau en éventail dans chaque plan perpendiculaire à la droite de points focaux). (c) Collimateur à géométrie conique (les “rayons” gamma convergent tous vers le point focal). D’après [29].

parallèles conventionnel. La figure 1.5a fournit une illustration géométrique de son comportement vis à vis des photons émis.

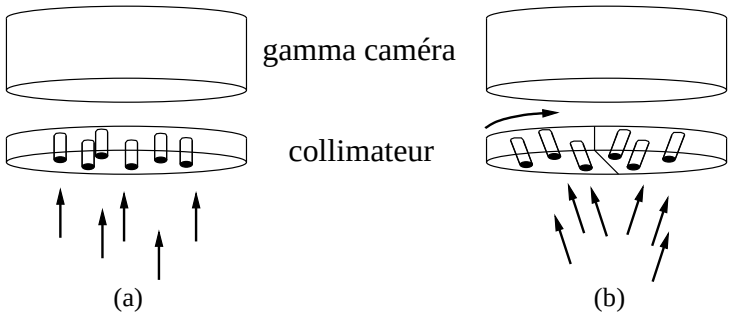


FIG. 1.4 – Comparaison entre (a) un collimateur à trous parallèles conventionnel et (b) un collimateur RSH à deux segments.

A l’origine, une seule position de la caméra fut envisagée pour le collimateur RSH. Cependant, la trajectoire Ω d’acquisition des projections parallèles, se limitant à un cercle sur la sphère unitaire (voir figure 1.5b), ne permettait pas une reconstruction exacte et stable de f [59]. L’idée de déplacer le système composé de la gamma caméra et du collimateur RSH en différentes positions autour du corps étudié fut introduite par Koral [39, 40]. Pour cette géométrie d’acquisition, souvent appelée géométrie RSH SPECT aujourd’hui, Clack et al. [12] ont proposé un algorithme de reconstruction ana-

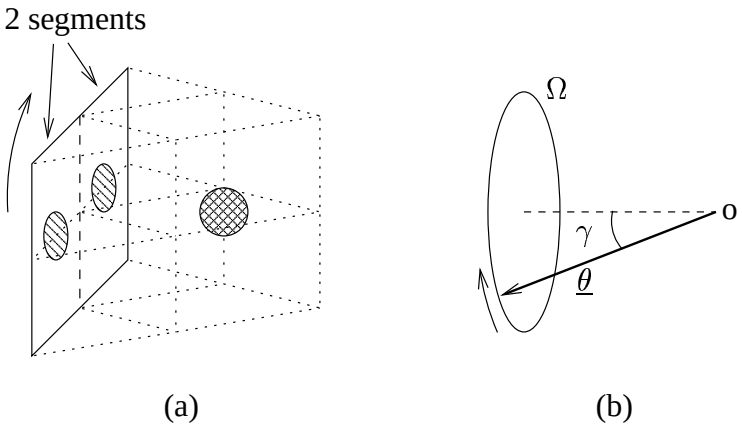


FIG. 1.5 – Collimateur RSH : (a) Illustration géométrique du comportement d'un collimateur RSH à deux segments ; deux projections parallèles sont mesurées simultanément par la caméra. (b) Trajectoire Ω suivie par le vecteur unitaire $\underline{\theta}$ lorsque le collimateur RSH (d'angle d'inclinaison γ) subit une rotation de 360° autour de son axe, pour une seule position fixée de la gamma caméra.

lytique exact et stable.

La géométrie RSH SPECT, telle que décrite dans [12], présente un certain nombre d'avantages par rapport à la géométrie SPECT conventionnelle. Tout d'abord, elle permet de se limiter à un nombre restreint de positions fixées de la caméra autour de l'axe du lit, ce qui limite l'encombrement autour du patient. Enfin, la surface du détecteur est mieux utilisée pour l'imagerie de petits organes tels que le cœur ou le cerveau par la possibilité de mesurer plusieurs projections parallèles en même temps. En pratique, le collimateur RSH subit une rotation complète de 360 degrés autour de son axe, ce qui a pour effet de mesurer plusieurs fois la même projection (2 ou 4 fois selon le nombre de segments du collimateur). Ceci constitue également un avantage de l'utilisation du collimateur RSH. Une combinaison judicieuse, un moyennage par exemple, des deux (ou quatre) mesures réalisées pour une projection permet de réduire le bruit inhérent au processus de mesure.

Modèle analytique des mesures

Un modèle simplifié. En première approximation, le nombre de photons comptés en un point P de la caméra est égal à la somme des photons émis le long de la droite passant par ce point et de direction $\underline{\theta}$ et, est directement proportionnel à l'intégrale de la fonction f le long de cette droite [36] (voir figure 1.6). La projection parallèle de f de direction $\underline{\theta}$ est alors vue comme l'ensemble des intégrales de la fonction f le long

de différentes droites parallèles de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de direction $\underline{\theta}$:

$$p_0(\underline{\theta}, P) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(P + t\underline{\theta}) \tag{1.1}$$

Le problème de la reconstruction d'une fonction 3D f à partir de ses projections parallèles est aujourd'hui bien maîtrisé, essentiellement grâce aux travaux d'Orlov [59] et Defrise [19, 21]. Cependant, ce modèle est trop simplifié et fournit généralement des images reconstruites de faible qualité et donc d'utilité réduite pour le médecin. Dans la littérature, on parle de reconstruction *sans correction d'atténuation* lorsque ce modèle est tout de même utilisé.

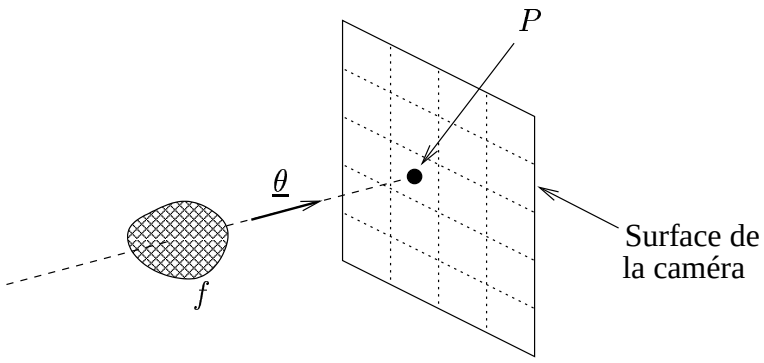


FIG. 1.6 – Illustration de la droite d'équation paramétrique $\underline{x} = P + t\underline{\theta}$, P étant un point situé sur la surface du détecteur.

Un modèle plus réaliste. Pour obtenir une reconstruction plus fiable de la distribution spatiale f du traceur radioactif, il est indispensable de tenir compte de l'atténuation dans le modèle utilisé pour décrire les projections fournies par le scanner. Décrivons brièvement le phénomène d'***atténuation***. Les photons émis par le traceur radioactif interagissent avec la matière au cours de leur trajet entre le point d'émission et le détecteur. Les deux principales interactions entre les photons et les électrons de la matière sont l'effet photoélectrique et l'effet Compton. Elles conduisent toutes deux à une atténuation du rayonnement photonique, provoquée par une absorption ou un changement de direction[4] d'une partie des photons émis. Les effets photoélectrique et Compton au point $\underline{x} = (x, y, z)$ sont caractérisés par un coefficient linéique d'atténuation noté $a(\underline{x})$. La fonction 3D $a(\underline{x})$ est souvent appelée *carte d'atténuation* dans la littérature. Elle présente des valeurs ponctuelles typiques de 0.0152mm^{-1} pour le torse, 0.0032mm^{-1} pour les poumons et 0.0248mm^{-1} pour la colonne vertébrale. L'atténuation conduit à une réduction du nombre de photons comptés par la caméra d'Anger et le modèle utilisé pour les projections est alors le suivant [52] :

$$p_a(\underline{\theta}, P) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(P + t\underline{\theta})\, \exp\left(-\int_t^{+\infty} dt'\, a(P + t'\underline{\theta})\right) \tag{1.2}$$

[4]On appelle photon *diffusé* un photon ayant dévié de sa trajectoire initiale suite à l'effet Compton.

Les projections sont alors appelées *projections parallèles atténuées* de la fonction f. Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte d'autres phénomènes physiques tels que la résolution spatiale du détecteur, le bruit statistique du processus d'émission ou encore le diffusé Compton[5]. Néanmoins, l'atténuation est un obstacle majeur à l'obtention d'images reconstruites de qualité. Lorsque ce modèle est utilisé, on parle de reconstruction avec ***correction d'atténuation***.

Le problème de reconstruction

Le problème de la reconstruction analytique et exacte de la fonction f à partir de projections parallèles atténuées ne connaît pas encore de solution générale. La seule géométrie pour laquelle ce problème est résolu de manière analytique, exacte et stable, quelle que soit la forme de la fonction $a(\underline{x})$, est la géométrie SPECT conventionnelle, correspondant à un grand cercle de la sphère unitaire [54, 58].

Lorsque la carte d'atténuation $a(\underline{x})$ est ***connue*** et ***constante*** sur un domaine convexe contenant la région d'émission, le problème de la reconstruction de f à partir de projections parallèles atténuées présente une forme simplifiée. Dans ce cas particulier, Markoe [46] a montré qu'il est possible de convertir chaque projection parallèle atténuée p_a mesurée en une nouvelle entité mathématique appelée ***projection parallèle exponentielle*** de f :

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, P) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(P + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{1.3}$$

où μ_0 correspond à la valeur constante de l'atténuation $a(\underline{x})$ sur la région d'émission. Cette conversion est obtenue en multipliant chaque valeur ponctuelle de la projection atténuée par un facteur dépendant de la carte d'atténuation. Le problème de la ***reconstruction analytique de f avec correction d'atténuation*** se réduit alors à celui de sa reconstruction à partir de projections parallèles exponentielles.

Le problème de la *reconstruction de f à partir de projections parallèles exponentielles* ne connaît pas à ce jour une solution générale exacte. Au moment où nous avons débuté nos recherches, seuls deux cas particuliers simples de ce problème d'inversion avaient été résolus de manière analytique. Il s'agit de la géométrie SPECT conventionnelle [48, 62, 69] et la géométrie correspondant à la sphère unitaire complète [31, 78], nécessitant la connaissance des projections parallèles exponentielles pour toutes les directions $\underline{\theta}$ possibles.

[5]Le diffusé Compton correspond à la détection par la caméra de photons diffusés. Ceux-ci provoquent une perte d'information quant à la localisation des sources émettrices et provoquent une baisse de contraste dans les images reconstruites.

Hypothèses et plan de la thèse

Tout au long de cette thèse, nous supposerons que f et a sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^3$, bornées et à support compact. De plus, nous considérerons que la carte d'atténuation $a(\underline{x})$ est *connue* et *constante*, égale à μ_0 sur un domaine convexe contenant le support de f.

Ainsi, dans cette thèse, nous avons envisagé le problème de la ***reconstruction analytique exacte et stable de*** $f(\underline{x})$ ***avec correction d'atténuation à partir de projections parallèles exponentielles pour différentes géométries d'acquisition***. Celui-ci constitue un problème mathématique relativement compliqué dont la résolution requiert avant tout la maîtrise d'un outil mathématique appelé *transformée rayons X exponentielle*. Cette transformée intégrale a été introduite à l'équation (1.3). Le chapitre 2 est principalement consacré à sa description en deux et trois dimensions. En 2D, cette transformée est également appelée *transformée de Radon exponentielle*.

Nos recherches ont abouti à la résolution du problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle pour la géométrie RSH ainsi que d'autres géométries particulières. Les chapitres 3, 4, 5 et 6 décrivent les différentes géométries étudiées et les méthodes que nous avons développées :

- Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle pour une acquisition des projections sur un demi-tour, c'est-à-dire sur $180°$. Jusqu'à présent, ce problème d'inversion était bien maîtrisé lorsque les projections étaient mesurées sur $360°$. Un certain nombre de travaux, comme par exemple ceux de Pan & Metz [48, 62], ainsi que des résultats de reconstruction par des méthodes itératives, laissaient entrevoir la possibilité d'une inversion exacte de la transformée de Radon exponentielle sur $180°$. Nous avons développé, en collaboration avec Frédéric Noo, une méthode analytique de reconstruction montrant que l'inversion de cette transformée sur $180°$ est possible de manière exacte et stable.

- La géométrie Ω d'acquisition des projections étudiée au chapitre 4 correspond à une bande équatoriale de la sphère unitaire. Cette géométrie présente l'intérêt de généraliser tous les résultats précédemment publiés sur l'inversion de la transformée rayons X exponentielle 3D [31, 78]. La méthode de reconstruction que nous proposons, appelée méthode EXP-TTR (pour *EXPonential-True Three dimensional Reconstruction*), englobe également le cas particulier correspondant à la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle présentée par Tretiak & Metz [69].

- Le chapitre 5 présente une méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles à partir de projections parallèles exponentielles connues pour un ensemble de directions Ω correspondant à une courbe fermée sur la sphère uni-

taire. Cette méthode constitue un apport théorique important à la résolution du problème de l'inversion exacte de la transformée rayons X exponentielle. De plus, elle présente un intérêt pratique dans l'étude de la géométrie RSH.

– Au chapitre 6, nous étudions le problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH SPECT, pour laquelle l'ensemble Ω est constitué d'une union de cercles sur la sphère unitaire. Dans ce chapitre, nous définissons clairement ce que nous entendons par géométrie RSH SPECT. Enfin, nos résultats présentent une condition nécessaire et suffisante d'inversion ainsi qu'une méthode générale de reconstruction pour quelques géométries d'acquisition RSH usuelles.

Tous les résultats mathématiques obtenus dans cet ouvrage sont vérifiés au cours des chapitres 3, 4, 5 et 6 grâce à des simulations. Pour chaque géométrie d'acquisition Ω étudiée, les simulations envisagées consistent à générer un ensemble de projections parallèles exponentielles exactes. Par exactes, nous entendons qu'elles sont calculées de manière analytique sur base des paramètres d'un fantôme constitué d'ellipsoïdes, fantôme décrit en détail à l'annexe C.1. Le but de chacune de ces simulations est de tester nos algorithmes de reconstruction sur ces données simulées "idéales" afin de montrer leur exactitude.

Nous étudions également le comportement fréquentiel de chaque méthode de reconstruction en présentant, en fin de chapitres 3, 4 et 6, leurs fonctions de transfert locales (ou MTF, de l'anglais *Modulation Transfert Function*).

Au chapitre 7, notre méthode de reconstruction en géométrie RSH est testée sur un ensemble de projections parallèles atténuées mesurées au moyen d'un prototype de scanner RSH SPECT développé à l'Université d'Utah dans le département de radiologie. Les résultats présentés montrent l'aptitude de notre algorithme de reconstruction à corriger l'atténuation de manière analytique dans une situation bien réelle.

Enfin, au chapitre 8, nous présentons nos conclusions ainsi que quelques perspectives.

Chapitre 2

Transformées rayons X atténuée et exponentielle

Ce chapitre est consacré à la description des transformées rayons X atténuée et exponentielle en deux et trois dimensions, ainsi qu'à la présentation de leurs principales propriétés. En particulier, en 2D, les transformées rayons X atténuée et exponentielle sont connues sous les appellations respectives de transformée de Radon atténuée et transformée de Radon exponentielle. Ces différentes transformées mathématiques sont à la base de tout algorithme de reconstruction analytique d'image avec correction d'atténuation en émission monophotonique. Nous décrivons également comment, et sous quelles conditions, les données atténuées peuvent être converties en données exponentielles. Signalons que la démonstration de la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle présentée dans ce chapitre est une contribution originale.

2.1 Transformée de Radon atténuée

La transformée de Radon atténuée est une généralisation de la transformée de Radon introduite en 1917 par Johan Radon [65]. Elle fut étudiée dès le début des années 70 mais ce n'est que tout récemment que le problème de son inversion exacte a été résolu [54, 58].

2.1.1 Définition

Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point du plan $\mathbb{R}^2$. Ce point peut également être représenté sous la forme vectorielle $\underline{x} = (x, y)$. Soient f et a deux fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}^2$, bornées et à support compact, encore notées $f(\underline{x})$ ou $f(x, y)$ et $a(\underline{x})$ ou $a(x, y)$ respectivement. La transformée de Radon atténuée de f est définie par

$$[\mathcal{R}_a\, f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\, \exp\left(-\int_{t}^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta})\right) \qquad (2.1)$$

où $\underline{\theta}^{\perp} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\underline{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux. $[\mathcal{R}_a f](\theta, s)$ est une fonction réelle définie sur $[0, 2\pi[\times\mathbb{R}$, l'indice a indiquant le caractère atténué de la transformée en référence à la fonction $a(\underline{x})$. Les variables (θ, s) sont appelées *coordonnées sinogrammes* d'une droite du plan $\mathbb{R}^2$ et sont illustrées à la figure 2.1.

En émission monophotonique, la fonction $f(\underline{x})$ est directement proportionnelle à la concentration du traceur radioactif au point $\underline{x}$. Elle est également appelée *carte d'émission*. La fonction $a(\underline{x})$ représente le coefficient d'atténuation linéique[1] d'un photon au point $\underline{x}$ et est souvent appelée *carte d'atténuation*. Pour un couple (θ, s) donné, la transformée de Radon atténuée de f peut être vue comme la somme des photons émis le long de la droite de coordonnées sinogrammes (θ, s), somme atténuée par un facteur dépendant de l'atténuation le long de cette même droite.

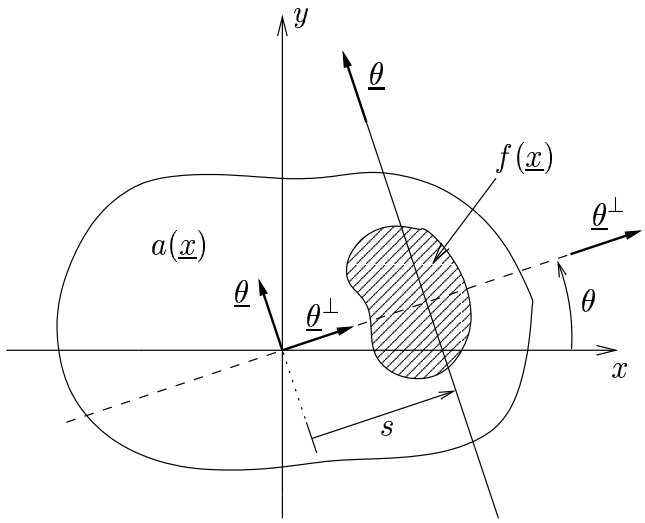


FIG. 2.1 – Coordonnées sinogrammes d'une droite et projection atténuée : θ est l'angle de la projection et s est la distance signée de la droite par rapport à l'origine, cette distance étant comptée positivement dans le sens de $\underline{\theta}^{\perp}$.

Lorsque θ est fixé, la fonction $[\mathcal{R}_a f](\theta, s)$ de la variable s est appelée *projection atténuée de Radon* de f. Vu que les fonctions f et a sont bornées et à support compact, les projections atténuées de Radon de f sont bornées et à support compact sur $\mathbb{R}$ [52].

2.1.2 Note bibliographique

Les différentes approches pour résoudre le problème de l'inversion de la transformée de Radon atténuée peuvent être classées en plusieurs catégories dépendant de la

[1] Ce coefficient est supposé constant dans toutes le directions au voisinage du point $\underline{x}$.

connaissance ou de la non-connaissance de la carte d'atténuation d'une part et du principe de la méthode envisagée, itératif ou analytique, d'autre part.

La fonction $a(\underline{x})$ est connue. En ce qui concerne l'approche itérative du problème d'inversion, de nombreux travaux ont été publiés au cours des quinze dernières années. Citons par exemple les références [18, 27, 70]. Quant à l'approche analytique, ce n'est que tout récemment qu'une formule d'inversion exacte de la transformée de Radon atténuée a été introduite pour une fonction $a(\underline{x})$ tout à fait générale [54, 58]. Par contre, lorsque la fonction $a(\underline{x})$ vérifie l'hypothèse supplémentaire d'être *constante* sur un domaine convexe contenant le support de f, une autre solution analytique existe [69]. Cette méthode consiste tout d'abord à *convertir* la transformée de Radon atténuée de f en une autre fonction, appelée *transformée de Radon exponentielle* de f [46] et, ensuite, à inverser celle-ci. Le problème de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle est aujourd'hui bien maîtrisé. Nous reviendrons sur cette transformée et son inversion dans la suite de ce chapitre. La deuxième colonne du tableau 2.1 résume les différentes méthodes d'inversion de la transformée de Radon atténuée lorsque la fonction $a(\underline{x})$ est connue.

Méthode	$a(\underline{x})$ **connue**		$a(\underline{x})$ **inconnue**
Itérative	Voir par exemple les références [18, 27, 70].		Calcul simultané de $a(\underline{x})$ et $f(\underline{x})$. Voir par exemple les références [4, 5, 22, 45, 66]
Analytique	$a(\underline{x})$ **constante** sur un domaine convexe contenant le support de f : formule d'inversion exacte [46, 48, 62, 69].	$a(\underline{x})$ **non-constante** sur le support de f : formule d'inversion exacte [54, 58].	Méthodes approchées basées sur des conditions de consistance [47, 53, 77]. Pas de formule d'inversion exacte.

TAB. 2.1 – Résumé des différentes méthodes d'inversion de la transformée de Radon atténuée avec quelques références importantes s'y rapportant.

La fonction $a(\underline{x})$ est inconnue. Un certain nombre de méthodes itératives existent dans la littérature. À partir d'une information a priori adéquate, ces techniques reconstruisent simultanément les cartes d'émission et d'atténuation à partir des mesures d'émission seules. Plus de renseignements sur ces méthodes sont fournies aux références [4, 5, 22, 45, 66]. En ce qui concerne l'approche analytique du problème d'inversion, aucune solution exacte n'a été introduite à ce jour et il semble fort peu probable qu'une inversion exacte de la transformée de Radon atténuée soit possible sans la connaissance de la carte d'atténuation. Néanmoins, une approche analytique alter-

native a été considérée par Natterer [53] et Welch [77]. L'idée de cette approche, basée sur les conditions de consistance de la transformée de Radon atténuée[2], consiste à utiliser les données d'émission pour construire une carte d'atténuation fictive qui simule au mieux les effets de la carte d'atténuation réelle. La véritable carte d'atténuation est ensuite assimilée à la carte d'atténuation fictive et la reconstruction de la carte d'émission est réalisée par une méthode analytique impliquant la connaissance de $a(\underline{x})$. Plus récemment, C. Mennessier et al. [47] ont introduit une méthode similaire, basée sur les conditions de consistance de la transformée de Radon exponentielle, permettant de convertir la transformée de Radon atténuée de f en sa transformée de Radon exponentielle. La reconstruction de la fonction f est alors obtenue par une méthode analytique d'inversion de la transformée de Radon exponentielle. La deuxième colonne du tableau 2.1 résume les méthodes d'inversion de la transformée de Radon atténuée lorsque la carte d'atténuation $a(\underline{x})$ est inconnue.

2.1.3 Conversion en données exponentielles

Pour rappel, nous faisons l'hypothèse que la fonction $a(\underline{x})$ est *connue* et présente une valeur *constante* μ_0 sur un domaine convexe Ω_f contenant le support de f. Comme déjà mentionné à la section 2.1.2 (tableau 2.1), une inversion exacte de la transformée de Radon atténuée de f est alors possible en convertissant $\mathcal{R}_a f$ en la transformée de Radon exponentielle de f, sur laquelle nous reviendrons par la suite. Dans cette section, nous montrons comment réaliser cette conversion.

Pour un couple (θ, s) donné, nous appelons $\tau_1(\theta, s)$ et $\tau_2(\theta, s)$ (avec $\tau_2(\theta, s) \geq \tau_1(\theta, s)$) les valeurs de t correspondant aux intersections de la droite d'équation $\underline{x} = s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta}$ avec la frontière du domaine Ω_f. La figure 2.2 illustre la situation. Par hypothèse, $f(\underline{x})$ est nulle en dehors de Ω_f. Dès lors, sa transformée de Radon atténuée peut s'écrire sous la forme

$$[\mathcal{R}_a\, f](\theta, s) = \int_{\tau_1(\theta,s)}^{\tau_2(\theta,s)} dt\; f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\; \exp\left(-\int_t^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta})\right) \tag{2.2}$$

L'intégrale apparaissant dans l'exponentielle peut elle-même être décomposée en deux parties

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta}) &= \int_t^{\tau_1(\theta,s)} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta}) + \int_{\tau_1(\theta,s)}^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta}) && (2.3) \\ &= (\tau_1(\theta, s) - t)\, \mu_0 + \int_{\tau_1(\theta,s)}^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta}) && (2.4) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $a(\underline{x}) = \mu_0$ sur le segment de droite correspondant à $t' \in [\tau_1(\theta, s), t]$; t étant limité à l'intervalle $[\tau_1(\theta, s), \tau_2(\theta, s)]$. L'introduction de ce

[2]Les conditions de consistance de la transformée de Radon atténuée sont des conditions mathématiques qu'une fonction $g(\theta, s)$ doit vérifier pour être la transformée de Radon atténuée d'une quelconque fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, bornée et à support compact.

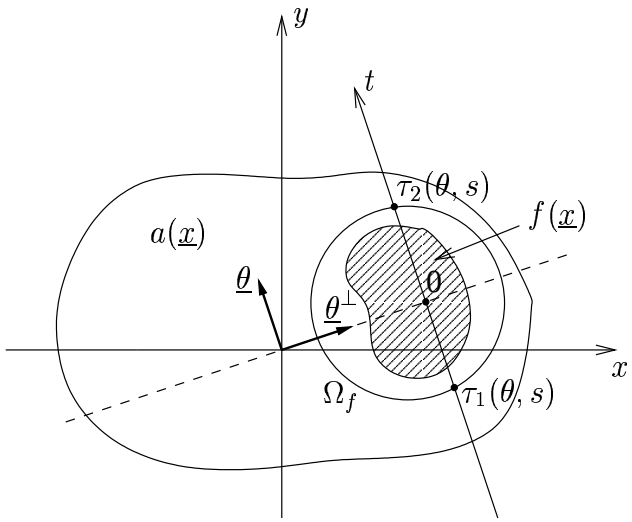


FIG. 2.2 – Cas d'une atténuation constante μ_0 sur un domaine convexe Ω_f contenant le support de f : intersection de la droite de coordonnées sinogrammes (θ, s) avec la frontière du domaine Ω_f. Dans cet exemple, $\tau_1(\theta, s) < 0$ et $\tau_2(\theta, s) > 0$.

résultat dans (2.2) fournit finalement

$$[\mathcal{R}_a f](\theta, s) = e^{-d(\theta,s)} \int_{\tau_1(\theta,s)}^{\tau_2(\theta,s)} dt\, f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} = e^{-d(\theta,s)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.5}$$

où nous avons défini la fonction $d(\theta, s)$ par

$$d(\theta, s) = \mu_0 \tau_1(\theta, s) + \int_{\tau_1(\theta,s)}^{+\infty} dt'\, a(s\underline{\theta}^{\perp} + t'\underline{\theta}) \tag{2.6}$$

La dernière intégrale apparaissant dans (2.5) est connue sous le nom de transformée de Radon exponentielle de f de coefficient d'atténuation constant μ_0. Nous observons donc que la connaissance de la fonction $a(\underline{x})$ et l'hypothèse $a(\underline{x}) = \mu_0$ sur Ω_f permettent de convertir la transformée de Radon atténuée de f en une autre transformée par multiplication par le facteur $e^{-d(\theta,s)}$. Cette conversion est due à Markoe [46]. Le problème de l'inversion de $\mathcal{R}_a f$ se réduit donc à celui de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle de f. L'inversion exacte de cette transformée est décrite en détail à la section suivante.

2.2 Transformée de Radon exponentielle

Dans cette section, nous définissons la transformée de Radon exponentielle et en donnons quelques propriétés importantes. Ensuite, nous proposons une démonstration originale de sa formule d'inversion.

2.2.1 Définition

Soient f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$, bornée et à support compact et μ_0 un coefficient d'atténuation constant. La transformée de Radon exponentielle de f, notée $\mathcal{R}_{\mu_0} f$, est définie par

$$[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.7}$$

La fonction $\mathcal{R}_{\mu_0} f$ est réelle et définie sur $[0, 2\pi[\times\mathbb{R}$. Pour $\mu_0 = 0$, la transformée de Radon exponentielle s'identifie à la transformée de Radon.

Nous remarquons que, bien qu'une droite puisse être représentée par deux couples de coordonnées sinogrammes différents, la transformée de Radon exponentielle prend des valeurs différentes pour chacun de ces couples, c'est-à-dire

$$[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta + \pi, -s) \neq [\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s) \tag{2.8}$$

alors que les couples (θ, s) et $(\theta + \pi, -s)$ représentent la même droite dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ce phénomène est dû à la présence de l'exponentielle dans la définition.

Lorsque θ est fixé, la fonction $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$ de la variable s est appelée *projection exponentielle de Radon* de f. Vu que la fonction f est bornée et à support compact, les projections exponentielles de Radon de f sont bornées et à support compact sur $\mathbb{R}$ [52].

Nous introduisons à présent une généralisation de la transformée de Radon exponentielle. Soit $\mu(\theta)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, *réelle*, *bornée* et *périodique* de période[3] 2π. La transformée de Radon exponentielle *avec atténuation dépendant de l'angle* de f est définie par

$$[\mathcal{R}_{\mu} f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(s\underline{\theta}^{\perp} + t\underline{\theta})\, e^{\mu(\theta) t} \tag{2.9}$$

Cette transformée de Radon exponentielle présente un coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ variable en fonction de l'angle de chaque projection. La fonction $\mathcal{R}_{\mu} f$ est définie sur $[0, 2\pi[\times\mathbb{R}$, réelle et bornée. Elle n'a aucune signification physique mais constituera un outil mathématique indispensable tout au long de cet ouvrage. Par la suite, nous parlerons indistinctement de transformée de Radon exponentielle dans le cas d'une atténuation constante μ_0 ou d'une atténuation variable $\mu(\theta)$.

La définition de la transformée de Radon exponentielle énoncée ci-avant (équation 2.9) admet une formulation utilisant la distribution de Dirac unidimensionnelle δ :

$$[\mathcal{R}_{\mu} f](\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}}\, \delta(s - \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}) \tag{2.10}$$

[3] Nous dirons par la suite que cette fonction est 2π-périodique et définissons ainsi la notion de 2π-périodicité.

où le symbole "." représente le produit scalaire entre deux vecteurs. La distribution δ limite le domaine d'intégration aux points de $\mathbb{R}^2$ situés le long de la droite d'équation $s = \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}$. Tout au long de cet ouvrage, nous utiliserons la distribution δ de Dirac comme un outil mathématique afin de simplifier les notations lorsque cela s'avérera nécessaire. La plupart de nos équations seront donc à considérer dans le cadre de la théorie des distributions.

Il existe une relation importante entre la transformée de Radon exponentielle d'une fonction f et sa transformée de Fourier 2D. Il s'agit du ***théorème du profil central de la transformée de Fourier*** qui s'énonce comme suit :

$$[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) = [\mathcal{F}_2 f](\sigma\underline{\theta}^{\perp} + j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta}) \tag{2.11}$$

où $\overline{\mu}(\theta) = \mu(\theta)/2\pi$. Le membre de gauche de (2.11) est la transformée de Fourier[4] de la projection $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$ pour un angle θ donné tandis que le membre de droite est le prolongement analytique de $\mathcal{F}_2 f$. Cette expression a un sens car la fonction f étant bornée et à support compact, sa transformée de Fourier existe toujours et possède un prolongement analytique sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Démonstration. Le théorème du profil central de la transformée de Fourier se démontre aisément si l'on utilise la définition (2.10) de la transformée de Radon exponentielle. En effet,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) &= \int_{\mathbb{R}} ds\, e^{-j2\pi s\sigma} \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}}\, \delta(s - \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\mathbb{R}} ds\, e^{-j2\pi s\sigma}\, \delta(s - \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}}\, e^{-j2\pi\sigma(\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{-j2\pi\underline{x}.(\sigma\underline{\theta}^{\perp} + j(\mu(\theta)/2\pi)\underline{\theta})} \\
&= [\mathcal{F}_2 f](\sigma\underline{\theta}^{\perp} + j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où nous avons calculé l'intégrale sur s en utilisant les propriétés de la distribution δ de Dirac. ∎

2.2.2 Inversion

Le problème de la reconstruction d'une fonction f à partir de sa transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante est aujourd'hui bien maîtrisé. Les contributions majeures sur le sujet ont été fournies par Tretiak & Metz [69] ou encore par Pan & Metz [48, 62]. On trouvera aux références [2, 15, 16, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33,

[4] Les définitions de la transformée de Fourier et de son inverse utilisées dans cet ouvrage sont présentées à l'annexe A.1.

34, 43, 44, 79, 80] d'autres résultats sur l'inversion de cette transformée.

La transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle a été étudiée par Hazou & Solmon [32], Kuchment & Schneiberg [42] et Palamodov [61]. Hazou & Solmon ont obtenu des résultats sur l'existence d'une solution au problème d'inversion. Kuchment & Schneiberg ont dérivé une formule d'inversion du type rétroprojection des projections filtrées. La preuve de leur formule reposait sur l'hypothèse que la fonction $\mu(\theta)$ était *positive* et *continûment dérivable*[5] en plus d'être réelle, bornée et 2π-périodique. Palamodov dériva une formule identique à celle de Kuchment & Schneiberg pour une fonction $\mu(\theta)$ réelle, bornée, continûment dérivable, de *signe arbitraire* mais vérifiant la condition de *périodicité* $\mu(\theta+\pi)=\mu(\theta)$, c'est-à-dire de π-périodicité.

La formule d'inversion présentée ci-après concerne la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle et est connue sous l'appellation *formule de rétroprojection des projections filtrées*, ou encore formule FBP, de l'anglais "Filtered backprojection". Elle correspond à la formule introduite par Kuchment & Schneiberg et Palamodov. La reconstruction FBP exacte d'une fonction $f(\underline{x})$ s'effectue en deux étapes. Les projections exponentielles de Radon sont tout d'abord filtrées pour obtenir

$$[\mathcal{R}_\mu f]^F(\theta,s) = k_\mu(\theta,s) \otimes [\mathcal{R}_\mu f](\theta,s) \tag{2.13}$$

où le symbole "$\otimes$" représente l'opération de convolution dans $\mathbb{R}$ et l'exposant "^{F}" indique le caractère filtré des projections. La convolution apparaissant dans (2.13) porte uniquement sur la variable s. Les projections filtrées sont ensuite rétroprojetées suivant la formule

$$f(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}}\, [\mathcal{R}_\mu f]^F(\theta, \underline{x}.\underline{\theta}^\perp) \tag{2.14}$$

Le filtre $k_\mu(\theta,s)$ est une fonction généralisée dont la transformée de Fourier est donnée par

$$[\mathcal{F}_1 k_\mu](\theta,\sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} + \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(\sigma)\,\mu'(\theta) & \text{si } |\sigma| > |\overline{\mu}(\theta)| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.15}$$

où $\overline{\mu}(\theta) = \mu(\theta)/2\pi$, $\mu'(\theta)$ est la dérivée première de la fonction $\mu(\theta)$ et "sign" est la fonction *signature* définie par

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Dans la littérature, il est courant de voir apparaître la notion de rétroprojection *pondérée*. Cela provient simplement de la présence de l'exponentielle dans la formule (2.14). Nous observons également que l'application de la formule FBP nécessite la

[5] Par *continûment dérivable*, nous entendons que la dérivée première de $\mu(\theta)$ existe et est continue.

connaissance des projections exponentielles de Radon sur un tour complet d'acquisition, c'est-à-dire pour $\theta \in [0, 2\pi[$. Ceci constitue une différence importante entre la transformée de Radon exponentielle et la transformée de Radon qui ne nécessite que la connaissance des projections sur un demi-tour, c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \pi[$. Il existe cependant une certaine redondance dans les données exponentielles sur un tour complet. Cette redondance a été étudiée par Pan & Metz [48, 62].

Dans la démonstration de sa formule d'inversion, Kuchment utilisait la théorie de plusieurs variables complexes, théorie relativement difficile à aborder. Nous proposons ici une démonstration originale de la formule d'inversion donnée en (2.13) et (2.14), basée sur le théorème d'intégration de Cauchy appliqué aux fonctions d'une seule variable complexe. Pour rappel, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$, réelle, bornée et à support compact. Pour notre démonstration, nous supposons que la fonction $\mu(\theta)$ est *définie sur* $\mathbb{R}$, *réelle, bornée,* 2π*-périodique et dérivable*[6]. Nos hypothèses sont donc moins restrictives que celles nécessaires aux démonstrations proposées par Kuchment & Schneiberg ou Palamodov.

Démonstration de la formule d'inversion. Le point de départ de notre preuve est le théorème du profil central de la transformée de Fourier donné par l'équation (2.11). Comme à la référence [34], nous introduisons deux fonctions $\omega(\theta, \sigma)$ et $\alpha(\theta, \sigma)$ telles que

$$\sigma = \omega \cos\alpha, \quad j\overline{\mu}(\theta) = \omega \sin\alpha \tag{2.17}$$

Pour $|\sigma| > |\overline{\mu}(\theta)|$, nous avons

$$\omega = \sqrt{\sigma^2 - \overline{\mu}^2(\theta)}, \quad \tan\alpha = j\overline{\mu}(\theta)/\sigma \tag{2.18}$$

Avec les définitions de $\underline{\theta}^{\perp}$ et $\underline{\theta}$, il est aisé de voir que

$$\sigma\underline{\theta}^{\perp} + j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta} = (\omega \cos(\theta+\alpha), \omega \sin(\theta+\alpha)) \tag{2.19}$$

Le théorème du profil central de la transformée de Fourier peut alors se mettre sous la forme

$$[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta, \sigma) = [\mathcal{F}_2 f]\,(\omega \cos(\theta+\alpha), \omega \sin(\theta+\alpha)) \tag{2.20}$$

À présent, la fonction f est exprimée comme l'inverse de sa transformée de Fourier en coordonnées polaires

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos\theta + y\sin\theta)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos\theta, \widehat{\omega}\sin\theta) \tag{2.21}$$

Soient $z = \theta + j\tau$ et $C_0 = \{z \in \mathbb{C} : \theta \in [0, 2\pi[, \tau = 0\}$. L'intégrale intérieure apparaissant dans (2.21) peut être vue comme une intégrale le long de la courbe C_0 dans le plan complexe de z, c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos\theta + y\sin\theta)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos\theta, \widehat{\omega}\sin\theta)$$

[6]Par *dérivable*, nous entendons que la dérivée première de $\mu(\theta)$ existe.

$$= \int_{C_0} dz\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos z + y\,\sin z)}\, [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z) \tag{2.22}$$

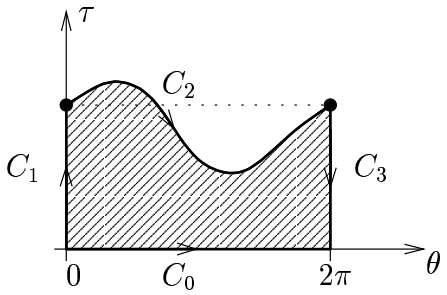


FIG. 2.3 – Définition des contours C_i ($i = 1, 2, 3$) formant un domaine fermé avec la courbe C_0.

Vu que f est bornée et à support compact, $[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z)$ est une fonction analytique entière[7] de z. Dès lors, le théorème d'intégration de Cauchy[8] peut être utilisé pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos\theta + y\,\sin\theta)}\, [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos\theta, \widehat{\omega}\,\sin\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} dz\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos z + y\,\sin z)}\, [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z) \tag{2.23}$$

où les courbes C_i forment un domaine fermé avec C_0. La figure 2.3 fournit une illustration de ces courbes ainsi que leur orientation. Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont définies par

$$C_1 = \{z = \theta + j\tau \in \mathbb{C} : \theta = 0,\, \tau \in [0, -j\widehat{\alpha}(0, \widehat{\omega})]\} \tag{2.24}$$
$$C_2 = \{z = \theta + j\tau \in \mathbb{C} : \theta \in [0, 2\pi],\, \tau = -j\widehat{\alpha}(\theta, \widehat{\omega})\} \tag{2.25}$$
$$C_3 = \{z = \theta + j\tau \in \mathbb{C} : \theta = 2\pi,\, \tau \in [0, -j\widehat{\alpha}(2\pi, \widehat{\omega})]\} \tag{2.26}$$

où nous avons introduit la fonction à valeurs complexes $\widehat{\alpha}(\theta, \widehat{\omega})$ donnée par

$$\tan\widehat{\alpha}(\theta, \widehat{\omega}) = \frac{j\overline{\mu}(\theta)}{\sqrt{\widehat{\omega}^2 + \overline{\mu}^2(\theta)}} \tag{2.27}$$

Notons que la partie réelle de $\widehat{\alpha}(\theta, \widehat{\omega})$ est identiquement nulle. Étant donnée l'hypothèse de périodicité faite sur $\mu(\theta)$, les contributions des courbes C_1 et C_3 se compensent. Il s'en suit que seule reste la contribution de C_2 dans l'équation (2.23).

[7] Une fonction d'une variable complexe est dite *entière* si elle est analytique sur tout le plan complexe.

[8] Le théorème d'intégration de Cauchy est rappelé à l'annexe A.3.

L'expression (2.21) de f peut ainsi se mettre sous la forme

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos(\theta+\widehat{\alpha})+y\,\sin(\theta+\widehat{\alpha}))} \\ [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos(\theta+\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\,\sin(\theta+\widehat{\alpha}))\,\left(1+\frac{d\widehat{\alpha}}{d\theta}\right) \tag{2.28}$$

Le dernier facteur de cette expression provient du jacobien de la paramétrisation de la courbe C_2, c'est-à-dire

$$dz = \left(1+\frac{d\widehat{\alpha}}{d\theta}\right) d\theta \tag{2.29}$$

$$= \left(1+\frac{j\overline{\mu}'(\theta)}{\sqrt{\widehat{\omega}^2+\overline{\mu}^2(\theta)}}\right) d\theta \tag{2.30}$$

Après avoir permuté l'ordre d'intégration entre $\widehat{\omega}$ et θ dans l'équation (2.28), nous considérons $\theta \in [0,2\pi[$ comme un paramètre fixé et nous appliquons le changement de variable

$$\widehat{\omega} = \sqrt{\sigma^2-\overline{\mu}^2(\theta)},\ \ \sigma > |\overline{\mu}(\theta)| \tag{2.31}$$

Ce changement de variable est tel que

$$\sigma\, d\sigma = \widehat{\omega}\, d\widehat{\omega},\ \ \widehat{\omega} = \omega(\theta,\sigma)\ \text{ et }\ \widehat{\alpha}(\theta,\widehat{\omega}) = \alpha(\theta,\sigma) \tag{2.32}$$

où $\omega(\theta,\sigma)$ et $\alpha(\theta,\sigma)$ sont les fonctions introduites en (2.17) et (2.18). En utilisant (2.31) avec le théorème du profil central de la transformée de Fourier (équations (2.19) et (2.20)), il vient

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|\overline{\mu}(\theta)|}^{+\infty} d\sigma\,\sigma\,\left(1+\frac{j\overline{\mu}'(\theta)}{\sigma}\right) e^{j2\pi\underline{x}.(\sigma\underline{\theta}^{\perp}+j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta})}\,[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \tag{2.33}$$

ou encore

$$f(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{|\overline{\mu}(\theta)|}^{+\infty} d\sigma\ (\sigma+j\overline{\mu}'(\theta))\ e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\,[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \tag{2.34}$$

Bien que constituant déjà une formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle, il est possible de mettre l'équation (2.34) sous une forme plus connue. Exprimons le complexe conjugué de (2.34) :

$$f^*(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{|\overline{\mu}(\theta)|}^{+\infty} d\sigma\ (\sigma-j\overline{\mu}'(\theta))\ e^{-j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\,[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f]^*(\theta,\sigma) \tag{2.35}$$

Nous réalisons maintenant le changement de variable $\sigma' = -\sigma$. Vu que $[\mathcal{R}_\mu f]$ est réelle, nous avons la propriété $[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f]^*(\theta,-\sigma') = [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma')$ et il vient

$$f^*(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{-\infty}^{-|\overline{\mu}(\theta)|} d\sigma'\ (-\sigma'-j\overline{\mu}'(\theta))\ e^{j2\pi\sigma'\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\,[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma') \tag{2.36}$$

Comme f est réelle, $f = f^*$ et la moyenne des équations (2.34) et (2.36) fournit

$$f(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{|\sigma|>|\overline{\mu}(\theta)|} d\sigma \left(\frac{|\sigma|}{2} + \frac{j}{2}\,\mathrm{sign}(\sigma)\,\overline{\mu}'(\theta) \right) e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}} [\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \tag{2.37}$$

Cette dernière équation est identique à la formule FBP donnée en (2.13) et (2.14), le filtrage des projections étant réalisé dans le domaine fréquentiel. ■

2.2.3 Coefficients d'atténuation particuliers

La formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle donnée en (2.14) est générale car elle s'applique à n'importe quel coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ réel, borné, dérivable et 2π-périodique. Dans cette section, nous nous attardons sur trois cas particuliers correspondant respectivement à un coefficient d'atténuation nul, constant et anti-symétrique.

A. Coefficient d'atténuation nul : transformée de Radon

Un premier cas intéressant à étudier est celui pour lequel $\mu(\theta) = 0$, ce qui correspond à la transformée de Radon. Nous observons, d'après la définition (2.9), que la transformée de Radon vérifie la propriété suivante

$$[\mathcal{R}_0 f](\theta+\pi,-s) = [\mathcal{R}_0 f](\theta,s) \tag{2.38}$$

qui traduit la redondance des données sur un tour complet. La connaissance de $[\mathcal{R}_0 f]$ peut en effet se limiter à $[0,\pi[\times\mathbb{R}$. Scindant l'intégrale (2.14) en deux parties (de 0 à π et de π à 2π), la formule d'inversion se réduit à

$$f(\underline{x}) = 2\int_0^{\pi} d\theta\, [\mathcal{R}_0 f]^F(\theta, \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}) \tag{2.39}$$

où les projections $[\mathcal{R}_0 f]^F(\theta,s)$ sont obtenues par filtrage des projections $[\mathcal{R}_0 f](\theta,s)$ avec la fonction $k_0(s)$ dont la transformée de Fourier est donnée par

$$[\mathcal{F}_1 k_0](\sigma) = \frac{|\sigma|}{2} \tag{2.40}$$

La formule (2.39) constitue la formule d'inversion FBP de la transformée de Radon. Le filtre $k_0(s)$ est indépendant de l'angle des projections et est appelé *filtre rampe* dans la littérature.

B. Atténuation constante

Considérons la fonction $\mu(\theta) = \mu_0$ où μ_0 est un coefficient d'atténuation constant. Ce cas particulier correspond à la transformée de Radon exponentielle avec atténuation

constante μ_0. La dérivée de la fonction $\mu(\theta)$ étant identiquement nulle, la formule d'inversion (2.14) se réduit à

$$f(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}} \, (k_{\mu_0}(s) \otimes [\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s))|_{s=\underline{x}.\underline{\theta}^\perp} \tag{2.41}$$

Le filtre $k_{\mu_0}(s)$ utilisé dans cette formule est indépendant de l'angle des projections. Sa transformée de Fourier est donnée par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_0}](\sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} & \text{si } |\sigma| > \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.42}$$

où $\overline{\mu}_0 = \mu_0/2\pi$. Les équations (2.41) et (2.42) constituent la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante. Cette formule fut dérivée en 1980 par Tretiak et Metz [69].

C. Coefficient d'atténuation anti-symétrique

Supposons que la fonction $\mu(\theta)$ vérifie la relation

$$\mu(\theta + \pi) = -\mu(\theta) \tag{2.43}$$

pour $\theta \in [0, \pi[$, c'est-à-dire que son graphe soit anti-symétrique par rapport à π. Dans ce cas particulier, nous observons que la transformée de Radon exponentielle vérifie la relation de redondance suivante (voir définition (2.9))

$$[\mathcal{R}_\mu f](\theta + \pi, -s) = [\mathcal{R}_\mu f](\theta, s) \tag{2.44}$$

Comme pour la transformée de Radon, la connaissance de la fonction $[\mathcal{R}_\mu f]$ peut donc se limiter à $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ et la formule d'inversion se simplifie en

$$f(\underline{x}) = 2 \int_0^{\pi} d\theta \, e^{-\mu(\theta) \underline{x}.\underline{\theta}} \, (k_\mu(\theta, s) \otimes [\mathcal{R}_\mu f](\theta, s))|_{s=\underline{x}.\underline{\theta}^\perp} \tag{2.45}$$

le filtre $k_\mu(\theta, s)$ étant toujours donné par (2.15).

Un exemple de fonction $\mu(\theta)$ vérifiant la propriété d'anti-symétrie (2.43) est donné à la figure 2.4. Afin de déterminer l'expression du filtre pour cet exemple, nous définissons la fonction trapèze "T_ϵ" définie sur $[0, \pi]$ par

$$T_\epsilon(\theta) = \begin{cases} \theta/\epsilon & \text{si } \theta \in [0, \epsilon[\\ 1 & \text{si } \theta \in [\epsilon, \pi - \epsilon] \\ (\pi - \theta)/\epsilon & \text{si } \theta \in]\pi - \epsilon, \pi] \end{cases} \tag{2.46}$$

où ϵ est un paramètre compris dans l'intervalle $]0, \pi/2]$.

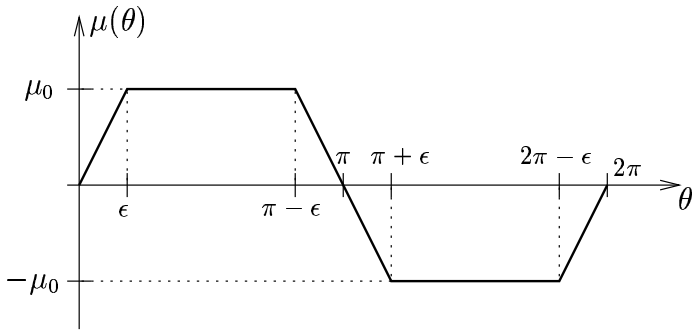


FIG. 2.4 – Exemple de coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ vérifiant la propriété d'anti-symétrie $\mu(\theta + \pi) = -\mu(\theta)$. ϵ est un paramètre appartenant à l'intervalle $]0, \pi/2]$.

Sur l'intervalle $[0, \pi[$, le coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ s'identifie à la fonction $\mu_0\, T_\epsilon(\theta)$. Il est alors aisé de montrer que, pour $\theta \in [\epsilon, \pi - \epsilon]$, l'expression fréquentielle du filtre à appliquer aux projections devient

$$[\mathcal{F}_1 k_\mu](\theta, \sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} & \text{si } |\sigma| > \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.47}$$

et est donc identique à celle du filtre utilisé dans le cas d'une atténuation constante μ_0. Sur les intervalles $[0, \epsilon[$ et $]\pi - \epsilon, \pi[$, la dérivée de $\mu(\theta)$ est constante, ce qui conduit également à une simplification de l'expression du filtre. En particulier, le filtre $k_\mu(\theta, s)$ est identique pour toutes les projections dont l'angle θ appartient à l'intervalle $[0, \epsilon[$ (il en va de même pour l'intervalle $]\pi - \epsilon, \pi[$).

Observons ce qui se produit si le paramètre ϵ est égal à zéro. La figure 2.4 nous indique que le coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ est constant et égal à μ_0 sur $[0, \pi[$ et dès lors, que la fonction $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$ correspond à la transformée de Radon exponentielle de f avec atténuation constante μ_0 sur $(\theta, s) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}$. Le raisonnement mené dans cette section nous apprend qu'il est possible d'inverser cette transformée avec la seule connaissance des projections exponentielles de Radon sur un demi-tour, c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \pi[$. Néanmoins, ce résultat ne peut être validé car la fonction $\mu(\theta)$ n'est plus dérivable et les hypothèses de validité de la formule d'inversion ne sont plus satisfaites. Il semble donc impossible d'inverser la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur 180 degrés. Nous montrerons au chapitre 3 que cette inversion est cependant possible de manière exacte et stable en considérant une approche différente du problème.

Nous en avons à présent terminé avec les transformées rayons X atténuée et exponentielle en deux dimensions. La fin de ce chapitre est consacrée à leur description en trois dimensions.

2.3 Transformée rayons X atténuée

2.3.1 Définition

Soient S^2 l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$ et $\underline{\theta} \in S^2$. Un point de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être représenté par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou sous forme vectorielle $\underline{x} = (x, y, z)$. Soient f et a deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$, réelles, bornées et à support compact. Elles sont encore notées respectivement $f(\underline{x})$ ou $f(x, y, z)$, et $a(\underline{x})$ ou $a(x, y, z)$. La transformée rayons X atténuée de f est définie par

$$[\mathcal{X}_a f](\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, \exp\left(-\int_t^{+\infty} dt'\, a(\underline{s} + t'\underline{\theta})\right) \tag{2.48}$$

où $\underline{s}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur $\underline{\theta}$. Nous appelons *complément orthogonal* du vecteur $\underline{\theta}$, noté $\Pi_{\underline{\theta}}$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\underline{\theta}$, c'est-à-dire

$$\Pi_{\underline{\theta}} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \underline{x}.\underline{\theta} = 0\right\} \tag{2.49}$$

Géométriquement, $\Pi_{\underline{\theta}}$ peut être vu comme le plan perpendiculaire au vecteur $\underline{\theta}$ et passant par l'origine du système d'axes (x, y, z). Étant donnée cette définition, la fonction $[\mathcal{X}_a f](\underline{\theta}, \underline{s})$ est définie sur $S^2 \times \Pi_{\underline{\theta}}$, l'indice a indiquant le caractère atténué de la transformée en référence à la fonction $a(\underline{x})$. La figure 2.5 illustre les grandeurs $\underline{\theta}$, $\underline{s}$ et $\Pi_{\underline{\theta}}$.

En imagerie monophotonique, la fonction f est appelée carte d'émission et représente la distribution spatiale du traceur radioactif. La fonction $a(\underline{x})$ est appelée carte d'atténuation et représente le coefficient d'atténuation linéique des photons au point $\underline{x}$, coefficient supposé constant dans toutes les directions au voisinage du point $\underline{x}$. Pour un couple $(\underline{\theta}, \underline{s})$ donné, la transformée rayons X atténuée de f peut être vue comme la somme des photons émis le long de la droite de direction $\underline{\theta}$ et passant par le point $\underline{s}$, somme atténuée par un facteur dépendant de l'atténuation le long de cette même droite. Des détails sur les principes de l'imagerie par émission monophotonique ont été fournis au chapitre 1.

Pour un vecteur $\underline{\theta}$ fixé, la fonction $p_a(\underline{\theta}, \underline{s}) = [\mathcal{X}_a f](\underline{\theta}, \underline{s})$ en la variable $\underline{s}$ constitue une *projection parallèle atténuée*[9] de la fonction f. Nous appelons alors $\Pi_{\underline{\theta}}$ le *plan de la projection*. Vu que f et a sont bornées et à support compact, la projection parallèle atténuée $p_a(\underline{\theta}, \underline{s})$ est bornée et à support compact sur $\Pi_{\underline{\theta}}$.

A l'heure actuelle, il n'existe aucune formule analytique exacte générale d'inversion de la transformée rayons X atténuée en trois dimensions. Un seul cas particulier, correspondant à une reconstruction "pseudo-3D"[10] de f, a été récemment résolu. Nous

[9] Le terme *parallèle* vient du fait qu'une projection parallèle contient des mesures de la fonction f correspondant à des droites parallèles de $\mathbb{R}^3$.

[10] Nous reviendrons sur la notion de reconstruction "pseudo-3D" en fin de chapitre.

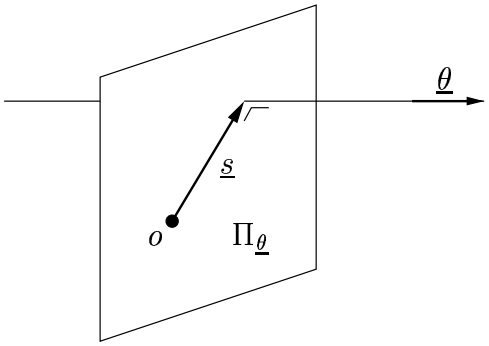


FIG. 2.5 – Illustration des paramètres $(\underline{\theta}, \underline{s})$ d'une projection parallèle, ainsi que du plan $\Pi_{\underline{\theta}}$ de la projection. o est l'origine du système d'axes (x, y, z).

en avons déjà parlé au début de ce chapitre, il s'agit de la formule d'inversion de la transformée de Radon atténuée introduite par Novikov [58] puis par Natterer [54].

2.3.2 Conversion en données exponentielles

Comme cela a déjà été fait en 2D (section 2.1.3), il est possible de convertir la transformée rayons X atténuée de f en sa transformée rayons X exponentielle, à condition que la carte d'atténuation $a(\underline{x})$ soit connue et constante sur un domaine convexe Ω_f contenant le support de f. Le problème de l'inversion de la transformée rayons X atténuée se réduit ainsi à celui de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle, sur laquelle nous reviendrons par la suite. Dans cette section, nous montrons comment les projections parallèles atténuées peuvent être converties en projections parallèles exponentielles.

Pour un couple $(\underline{\theta}, \underline{s})$ donné, nous appelons $\tau_1(\underline{\theta}, \underline{s})$ et $\tau_2(\underline{\theta}, \underline{s})$ (avec $\tau_1(\underline{\theta}, \underline{s}) \leq \tau_2(\underline{\theta}, \underline{s})$) les valeurs de t correspondant aux intersections de la droite d'équation $\underline{x} = \underline{s} + t\underline{\theta}$ avec la frontière du domaine Ω_f. Un raisonnement analogue à celui mené pour la transformée de Radon atténuée conduit sans difficulté à la relation suivante

$$p_a(\underline{\theta}, \underline{s}) = e^{-d(\underline{\theta}, \underline{s})} \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.50}$$

où μ_0 est la valeur de $a(\underline{x})$ sur Ω_f et la fonction $d(\underline{\theta}, \underline{s})$ est définie par

$$d(\underline{\theta}, \underline{s}) = \mu_0 \tau_1(\underline{\theta}, \underline{s}) + \int_{\tau_1(\underline{\theta}, \underline{s})}^{+\infty} dt'\, a(\underline{s} + t'\underline{\theta}) \tag{2.51}$$

L'intégrale apparaissant dans (2.50) est connue sous l'appellation de transformée rayons X exponentielle de la fonction f. Nous observons donc que si la carte d'atténuation est connue et constante sur un domaine convexe contenant le support de f, le problème de l'inversion de la transformée rayons X atténuée se réduit à celui de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle.

2.4 Transformée rayons X exponentielle

2.4.1 Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, réelle, bornée et à support compact. La transformée rayons X exponentielle de f est définie par

$$[\mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.52}$$

où $\underline{s}.\underline{\theta} = 0$ et μ_0 est un coefficient d'atténuation constant. $[\mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{s})$ est une fonction à valeurs réelles, définie sur $S^2 \times \Pi_{\underline{\theta}}$. Pour $\mu_0 = 0$, la transformée rayons X exponentielle est identique à la transformée rayons X [21].

Pour $\underline{\theta}$ fixé, la fonction $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = [\mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{s})$ en la variable $\underline{s}$ constitue une projection parallèle exponentielle de la fonction f. Cette dernière étant bornée et à support compact, la projection parallèle exponentielle $p_a(\underline{\theta}, \underline{s})$ est bornée et à support compact sur $\Pi_{\underline{\theta}}$.

Tout comme pour la transformée de Radon exponentielle, il existe un ***théorème du profil central de la transformée de Fourier*** pour la transformée rayons X exponentielle en trois dimensions. Il s'énonce comme suit

$$[\mathcal{F}_2 p_{\mu_0}](\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = [\mathcal{F}_3 f](\underline{\sigma} + j\overline{\mu}_0\underline{\theta}), \qquad \underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0, \qquad \overline{\mu}_0 = \mu_0/2\pi \tag{2.53}$$

Dans cette formule, $\mathcal{F}_2 p_{\mu_0}$ est la transformée de Fourier (2D) de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ tandis que le membre de droite est le prolongement analytique de la transformée de Fourier (3D) de la fonction f sur $\mathbb{C}^3$. La fonction f étant bornée et à support compact, cette expression a toujours un sens.

Démonstration. Établissons la relation (2.53). Pour $\underline{\theta}$ fixé, et pour tout vecteur $\underline{\sigma}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0$, nous avons

$$[\mathcal{F}_2 p_{\mu_0}](\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}}\, [\mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{s}) \tag{2.54}$$

$$= \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.55}$$

Nous effectuons à présent le changement de variables $\underline{x} = \underline{s} + t\underline{\theta}$ pour lequel $t = \underline{x}.\underline{\theta}$ et $\underline{s} = \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}$. Il vient ainsi

$$[\mathcal{F}_2 \mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{-j2\pi \underline{\sigma}.(\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta})}\, e^{\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}} \tag{2.56}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{-j2\pi \underline{x}.(\underline{\sigma} + j\overline{\mu}_0\underline{\theta})} \tag{2.57}$$

car $\underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0$. ■

2.4.2 Introduction au problème de l'inversion

Le problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle est étudié depuis de nombreuses années. Cependant, ce problème n'est aujourd'hui que partiellement résolu. Avant de faire le tour de la littérature sur le sujet, nous commençons par définir clairement le problème d'inversion.

Soit Ω un sous-ensemble de la sphère unitaire S^2. Le problème de l'inversion analytique de la transformée rayons X exponentielle s'énonce comme suit

> *Étant donné un ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à un ensemble Ω de directions sur la sphère unitaire, le problème est de déterminer une formule analytique, exacte et stable de reconstruction de $f(\underline{x})$, formule s'exprimant explicitement en fonction des projections.*

Intuitivement, une reconstruction exacte de f n'est pas possible pour tout ensemble Ω de la sphère unitaire. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un ensemble Ω constitué d'un seul vecteur unitaire de S^2. Les données du problème se limitent ainsi à une seule projection parallèle exponentielle. Pour permettre une reconstruction exacte et stable de f, l'ensemble Ω doit donc vérifier certaines conditions.

Dans le cas particulier de la transformée rayons X ($\mu_0 = 0$), le problème d'inversion est à présent bien maîtrisé. Traçons-en brièvement l'historique. En 1976, Orlov a énoncé une condition nécessaire et suffisante d'inversion [59]. Cette condition s'énonce comme suit

> *La reconstruction d'une fonction f à partir de sa transformée rayons X $[\mathcal{X}_0 f](\underline{\theta}, \underline{s})$ connue pour tout vecteur $\underline{\theta} \in \Omega$ est possible si et seulement si l'ensemble Ω est rencontré par tout grand cercle de la sphère unitaire S^2.*

Orlov introduisit aussi une première méthode de reconstruction pour tout ensemble Ω vérifiant sa condition [59, 60]. Suite aux travaux importants d'Orlov, de nombreuses publications concernant la reconstruction d'une image 3D à partir de ses projections parallèles apparurent dans la littérature. Citons [11, 14, 17, 20, 37, 38, 63, 64, 67]. La plupart de ces méthodes étaient basées sur la technique de rétroprojection des projections filtrées (FBP), selon laquelle les projections parallèles $p_0(\underline{\theta}, \underline{s})$ sont tout d'abord convoluées avec un filtre adéquat $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour obtenir

$$p_0^F(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\underline{s}'.\underline{\theta}=0} d\underline{s}'\, h(\underline{\theta}, \underline{s} - \underline{s}')\, p_0(\underline{\theta}, \underline{s}') \qquad \text{où } \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{2.58}$$

Dans cette équation, $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ est une fonction généralisée au sens de la théorie des distributions. Ensuite, les projections filtrées sont rétroprojetées selon la formule

$$f(\underline{x}) = \int_{\Omega} d\underline{\theta}\, p_0^F(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}) \tag{2.59}$$

où $\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}$ est la projection du point $\underline{x}$ sur le plan $\Pi_{\underline{\theta}}$. D'un premier abord, cette procédure peut être vue comme une généralisation de la méthode FBP utilisée pour inverser la transformée de Radon en 2D, dans laquelle les projections 1D sont tout d'abord convoluées avec un filtre 1D et ensuite rétroprojetées. La situation est cependant plus compliquée en 3D.

En trois dimensions, il existe de la redondance [59] dans les données : un ensemble donné de projections parallèles peut contenir trop d'informations par rapport au minimum requis pour obtenir une reconstruction exacte et stable de f. En d'autres termes, certaines projections sont superflues. Cette redondance se traduit par la non-unicité de la fonction $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour un même ensemble Ω donné. Ceci contraste avec le cas 2D pour lequel le filtre est unique ; il s'agit du *filtre rampe* déjà mentionné.

La non-unicité du filtre en 3D avait déjà été mise en évidence dans le début des années 80 lorsque Colsher [17] et Ra et al. [64] introduisirent deux filtres différents pour le même ensemble Ω de projections. Le filtre de Colsher fut plus tard généralisé par Schorr et Townsend [67]. Kinahan et al. [38] démontrèrent l'équivalence entre l'utilisation de ce filtre et la méthode de reconstruction d'Orlov [59]. Defrise et al. [21] dérivèrent en 1989 une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier un filtre $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour être *valide,* c'est-à-dire pour permettre une reconstruction 3D exacte de f à partir d'un ensemble Ω de projections non bruitées et vérifiant la condition d'Orlov citée plus haut. Cette condition [19, 21] s'énonce comme suit

> *Étant donné un ensemble Ω de projections parallèles vérifiant la condition d'Orlov, la fonction $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ est un filtre valide si et seulement si*
>
> $$\int_{\Omega} d\underline{\theta}\, \delta(\underline{\theta}.\underline{\sigma})\, [\mathcal{F}_2 h](\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = 1 \qquad (2.60)$$
>
> *pour tout vecteur $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^3$.*

Il fut alors prouvé que tous les filtres dérivés jusque là étaient des solutions particulières de l'équation (2.60). Finalement, en 1993, Defrise et al. [19] proposèrent quelques techniques permettant de déterminer différentes expressions du filtre $h(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour un ensemble Ω donné.

Venons-en à présent au problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle, problème majeur étudié dans cette thèse. Celui-ci est, à l'heure actuelle, très loin d'être résolu. La transformée rayons X ($\mu_0 = 0$) ne constitue qu'un cas particulier de la transformée rayons X exponentielle et un certain nombre de difficultés mathématiques empêchent de généraliser les résultats d'Orlov [59, 60] ou de Defrise [19, 21] au cas exponentiel. Une simple observation du théorème du profil central de la transformée de Fourier (équation (2.53)) permet de comprendre intuitivement d'où proviennent ces difficultés. Lorsque $\mu_0 = 0$, prendre la transformée de Fourier d'une projection parallèle permet d'obtenir la transformée de Fourier de l'image f sur un

plan passant par l'origine du domaine fréquentiel de l'image [59]. Cette constatation fut à l'origine de nombreux travaux sur le sujet et en particulier des deux travaux d'Orlov. Si μ_0 est différent de zéro, la situation est toute autre. Calculer la transformée de Fourier 2D d'une projection parallèle exponentielle fournit la transformée de Fourier de l'image en des *fréquences complexes*, impliquant l'utilisation de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Cette théorie est généralement considérée "très complexe". Le problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle semble donc être un problème mathématique relativement compliqué.

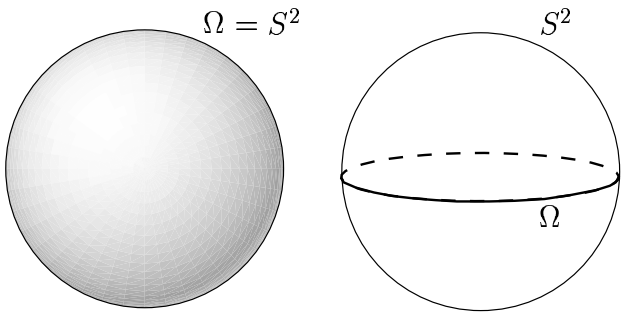


FIG. 2.6 – Ensembles Ω pour lesquels une inversion analytique et exacte de la transformée rayons X exponentielle est connue : (a) Sphère complète. (b) Un grand cercle de la sphère unitaire.

Au moment où nous avons débuté nos recherches, seuls deux articles concernant la reconstruction exacte d'une fonction tridimensionnelle f à partir de ses projections parallèles exponentielles avaient été publiés. Ces deux travaux [31, 78] nécessitaient la connaissance des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour tout vecteur $\underline{\theta} \in S^2$ (figure 2.6a). Évidemment, à ces deux travaux vient s'ajouter la géométrie correspondant à un grand cercle complet de la sphère unitaire (figure 2.6b) pour laquelle une inversion "pseudo-3D" de la transformée rayons X exponentielle est possible de manière exacte en utilisant la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur un tour complet [69] (voir section 2.4.3).

Nos recherches ont porté sur l'étude et le développement de méthodes de reconstruction analytiques exactes de la fonction f à partir d'ensembles de projections parallèles exponentielles correspondant à des ensembles Ω plus complexes, tels que ceux vérifiant la condition d'Orlov. Les chapitres 3, 4, 5 et 6 décrivent les géométries que nous avons étudiées, ainsi que les nouveaux résultats d'inversion que nous avons obtenus.

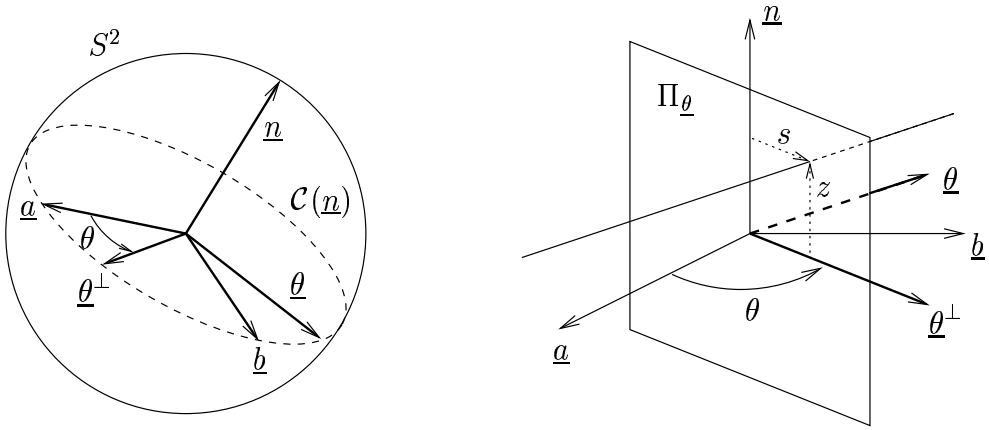
2.4.3 Inversion “pseudo-3D”

Considérons un ensemble de projections parallèles exponentielles de la fonction f caractérisé par un ensemble de directions Ω se réduisant à un ***grand cercle*** de la sphère unitaire S^2. Dans ce cas, il existe un lien direct entre la transformée rayons X exponentielle 3D et la transformée de Radon exponentielle. Nous montrons ci-après qu'il est possible de reconstruire l'image 3D f à partir des projections parallèles exponentielles données en n'utilisant que des techniques de reconstruction purement 2D, techniques faisant intervenir la transformée de Radon exponentielle. Nous parlerons alors de reconstruction “pseudo-3D”.

Soit un ensemble de projections parallèles exponentielles

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{2.61}$$

connues pour tout $\underline{\theta} \in \Omega$, où Ω est le grand cercle de la sphère unitaire orthogonal à un vecteur unitaire $\underline{n}$ de S^2. Ce cercle est noté $\mathcal{C}(\underline{n})$. Nous introduisons deux vecteurs unitaires $\underline{a}$ et $\underline{b}$ orthogonaux entre eux et orthogonaux à $\underline{n}$. Les vecteurs $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{n})$ forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Tout vecteur $\underline{\theta}$ de Ω se trouve toujours dans le plan $\Pi_{\underline{n}}$ et peut y être repéré par un angle θ via la relation $\underline{\theta} = -\sin\theta\,\underline{a} + \cos\theta\,\underline{b}$. Nous définissons également le vecteur $\underline{\theta}^{\perp}$ perpendiculaire à $\underline{\theta}$ et inclus dans le plan $\Pi_{\underline{n}}$: $\underline{\theta}^{\perp} = \cos\theta\,\underline{a} + \sin\theta\,\underline{b}$. La figure 2.7a illustre la situation.



(a) (b)

FIG. 2.7 – Reconstruction “pseudo-3D” : (a) Description de la géométrie et des vecteurs $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{\theta}$ et $\underline{\theta}^{\perp}$. (b) Plan $\Pi_{\underline{\theta}}$ de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$; le vecteur $\underline{\theta}$ est toujours inclus dans le plan $\Pi_{\underline{n}}$.

Les vecteurs unitaires $\underline{\theta}^{\perp}$ et $\underline{n}$ constituent une base orthonormée du plan $\Pi_{\underline{\theta}}$ de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. Dans cette base, le vecteur $\underline{s}$ peut être représenté par les deux va-

riables réelles s et z de la manière suivante : $\underline{s} = s\underline{\theta}^{\perp} + z\underline{n}$. Voir figure 2.7b.

Le principe de la reconstruction "pseudo-3D" consiste à considérer la fonction 3D f comme un empilement de tranches parallèles qui sont chacune reconstruites indépendamment suivant une technique de reconstruction purement bidimensionnelle. Appelons $f_z(x, y) = f(x\,\underline{a} + y\,\underline{b} + z\,\underline{n})$ la fonction 2D correspondant à la tranche de f perpendiculaire à $\underline{n}$ et située à la distance signée z de l'origine du système d'axes $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{n})$. Des échantillons de la transformée de Radon exponentielle de $f_z(x, y)$ peuvent être extraits des projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ grâce à la relation

$$[\mathcal{R}_{\mu_0} f_z](\theta, s) = p_{\mu_0}(\underline{\theta}, s\underline{\theta}^{\perp} + z\underline{n}) \tag{2.62}$$

valable pour tout $\underline{\theta} \in \Omega$ et $(s, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cette relation indique que les valeurs de la projection exponentielle de Radon $[\mathcal{R}_{\mu_0} f_z](\theta, s)$ correspondent aux valeurs de la projection parallèle exponentielle $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ le long de la ligne d'équation $\underline{s} = s\underline{\theta}^{\perp} + z\underline{n}$, z étant fixé. La reconstruction de chaque fonction f_z est obtenue par inversion de sa transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante $\mathcal{R}_{\mu_0} f_z$, en utilisant par exemple la formule FBP de la section 2.2.3. Finalement, les différentes tranches f_z reconstruites sont "empilées" pour reconstituer l'entité 3D f.

Lorsque le coefficient d'atténuation μ_0 est égal à zéro, le raisonnement mené ci-avant décrit une méthode d'inversion "pseudo-3D" de la transformée rayons X. Dans ce cas, une méthode 2D d'inversion de la transformée de Radon est utilisée pour reconstruire chaque tranche f_z. Pour cette inversion, il suffit de connaître les projections de Radon sur un demi-tour seulement, c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \pi[$. L'ensemble Ω peut donc se limiter à un demi-grand cercle de la sphère unitaire.

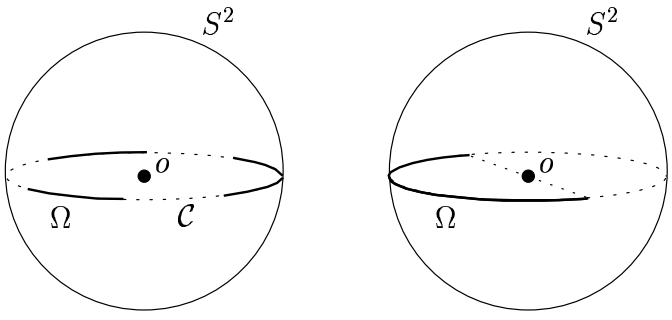
Le raisonnement précédent peut être appliqué à n'importe quel coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$. La méthode d'inversion "pseudo-3D" utiliserait dans ce cas une formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle pour reconstruire chaque tranche f_z. L'ensemble Ω se limite ou non à un demi-grand cercle de la sphère unitaire selon la forme de la fonction $\mu(\theta)$ et la méthode d'inversion utilisée. Par exemple, pour un coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ quelconque mais borné, dérivable et 2π-périodique, la formule FBP de la section 2.2.2 peut être utilisée et l'ensemble Ω est un grand cercle complet de S^2. Cette dernière remarque sera utile au chapitre 3 qui étudie l'acquisition des projections parallèles sur un demi-cercle et plus particulièrement au chapitre 6 concernant la géométrie RSH SPECT.

Chapitre 3

Acquisition sur un demi-cercle

Dans ce chapitre, nous présentons des nouveaux résultats sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle. En particulier, nous avons démontré qu'il est possible d'inverser la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur un demi-tour d'acquisition des projections et fourni une formule d'inversion analytique, stable et exacte. Introduits dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D", ces résultats correspondent à la résolution du problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle pour un ensemble de directions correspondant à un sous-ensemble d'un grand cercle $\mathcal{C}$ de la sphère unitaire (figure 3.1a) et en particulier, à un demi-cercle complet de la sphère unitaire (figure 3.1b).

Les résultats originaux sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article [57] paru dans la revue "Inverse Problems".



(a) (b)

FIG. 3.1 – (a) Ensemble Ω de directions correspondant à un sous-ensemble du grand cercle $\mathcal{C}$. (b) Demi-cercle complet de la sphère unitaire S^2.

3.1 Motivation

Plaçons-nous dans le contexte d'une acquisition "pseudo-3D" des projections parallèles. La gamma caméra, munie d'un collimateur à trous parallèles, subit une rotation autour de l'axe du lit du patient, axe que nous notons $\underline{e_z}$. Le vecteur unitaire $\underline{\theta}$, représentant la direction des trous au sein du collimateur, est ainsi toujours perpendiculaire au vecteur $\underline{e_z}$ et la trajectoire Ω des projections mesurées est donc incluse dans le plan $\Pi_{\underline{e_z}}$. Le problème de la reconstruction de la distribution spatiale 3D du traceur radioactif se réduit alors à un problème d'inversion bidimensionnel (voir section 2.4.3).

Classiquement, la caméra subit une rotation complète autour de l'axe du lit du patient (figure 1.2). La trajectoire d'acquisition Ω correspond alors à un grand cercle complet de la sphère unitaire. Il est possible d'améliorer ce mode d'acquisition en limitant la rotation de la caméra à un demi-tour, la trajectoire Ω se réduisant dans ce cas à un demi-cercle de la sphère unitaire. Citons quelques avantages d'une acquisition sur $180°$.

Dans un premier temps, il est possible d'augmenter le rapport signal sur bruit dans les projections mesurées et donc d'obtenir des images reconstruites de meilleure qualité. En effet, si on considère une même période totale d'acquisition et un même pas angulaire entre projections comparés à une acquisition sur 360 degrés, la durée d'acquisition d'une projection peut être approximativement doublée. Le nombre de photons comptés par projection est donc plus important, ce qui améliore le rapport signal sur bruit dans chaque projection.

Un second avantage d'une acquisition des projections sur un demi-tour est la possibilité de ne pas mesurer les projections susceptibles de présenter une forte atténuation. Celles-ci sont en général très bruitées et limitent la qualité de l'image reconstruite. À la figure 3.2, nous avons représenté un schéma d'acquisition des mesures correspondant à l'imagerie du cœur. Celui-ci étant décentré par rapport au thorax, il existe des trajets pour lesquels les photons rencontrent une plus forte atténuation, comme ceux par exemple passant par la colonne vertébrale ou présentant une plus longue distance à parcourir par les photons au sein des tissus atténuants. Il est donc judicieux de mesurer les projections pour lesquelles les photons rencontrent la plus faible atténuation. La figure 3.2 illustre un protocole d'acquisition fournissant un jeu de projections (sur 180 degrés) présentant le moins d'atténuation possible [23].

Malheureusement, une acquisition des projections sur $180°$ ne permet pas une reconstruction avec correction d'atténuation analytique si on utilise le modèle de la transformée de Radon atténuée pour caractériser les données fournies par le scanner. La formule d'inversion exacte de cette transformée [54, 58] nécessite en effet la connaissance des projections sur $360°$. Si l'atténuation est connue et constante sur la région d'émission - hypothèse que nous avons faites tout au long de cette thèse -, le problème

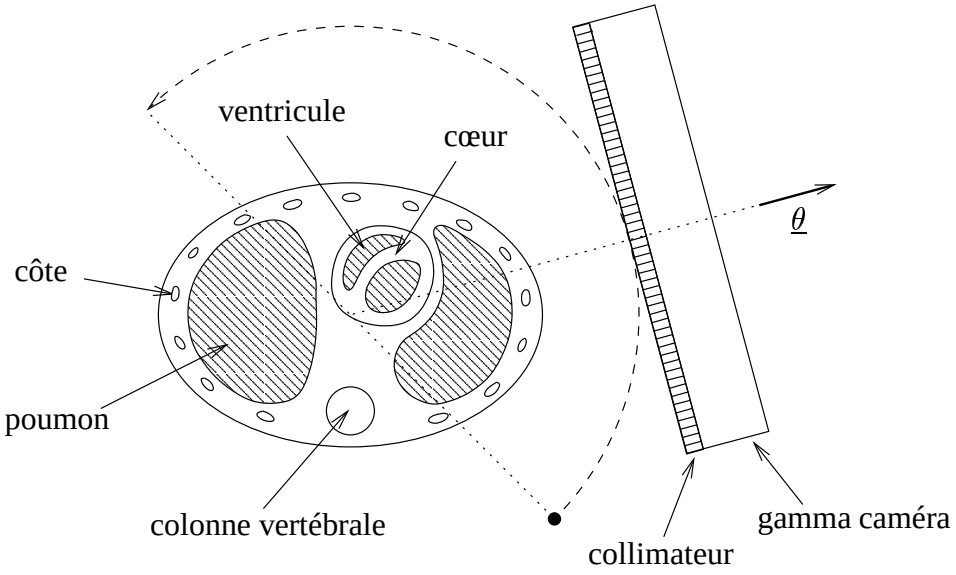


FIG. 3.2 – Illustration d'une acquisition des projections sur un demi-tour. Le vecteur unitaire $\underline{\theta}$ caractérise la direction des photons au travers du collimateur.

de l'inversion de la transformée de Radon atténuée se réduit à celui de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante (section 2.1.3). Jusqu'à ce jour, il était considéré que l'inversion analytique de la transformée de Radon exponentielle nécessitait la connaissance des projections sur $360°$. Il semblait donc impossible d'obtenir une reconstruction avec correction d'atténuation analytique si une acquisition sur $180°$ était envisagée.

Dans ce chapitre, nous montrons qu'il est possible d'inverser de manière analytique, exacte et stable, la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur $180°$. Ce résultat, combiné à une acquisition des projections sur un demi-tour, constitue une amélioration significative de la géométrie SPECT conventionnelle quand on réalise de la correction d'atténuation analytique.

Nos recherches ont en fait abouti à un résultat d'inversion plus général dont l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur $180°$ n'est qu'un cas particulier. À la section suivante, nous décrivons tout d'abord notre algorithme de reconstruction pour le cas général. Il sera ensuite particularisé au cas d'une atténuation constante sur $180°$.

3.2 Algorithme de reconstruction

Dans un souci de clarté de l'exposé, nous allons tout d'abord énoncer les différents résultats originaux que nous avons obtenus sur l'inversion de la transformée de Radon

exponentielle. La section 3.3 en fournira une démonstration complète.

3.2.1 Cas général

Soit une fonction réelle f, définie sur $\mathbb{R}^2$, bornée et à support compact sur

$$\Omega_f = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\underline{x}\| < D \right\} \tag{3.1}$$

où $\|\underline{x}\|$ est la norme du vecteur $\underline{x}$. La méthode que nous avons développée permet de reconstruire f à partir de sa transformée de Radon exponentielle

$$[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(s\underline{\theta}^\perp + t\underline{\theta})\, e^{\mu(\theta)t} \tag{3.2}$$

connue pour (θ, s) appartenant à $[0, \pi[\times]-\infty, +\infty[$. Pour rappel, $\underline{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ et $\underline{\theta}^\perp = (\cos\theta, \sin\theta)$. Notre méthode est valable pour n'importe quel coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ réel, borné, constant et égal à $\pm\mu_0$ par morceaux et ne présentant qu'un nombre fini de discontinuités sur $]0, \pi[$. Nous noterons N_d le nombre de discontinuités de $\mu(\theta)$ sur $]0, \pi[$ et θ_k $(k = 1, \ldots, N_d)$ les valeurs de θ pour lesquelles $\mu(\theta)$ présente une discontinuité. Un exemple de fonction $\mu(\theta)$ vérifiant ces conditions est illustré à la figure 3.3. Remarquons dès à présent que la fonction $\mu(\theta)$ n'est pas dérivable et donc que la formule d'inversion présentée à la section 2.2.2 n'est pas applicable. Le cas particulier $N_d = 0$ et $\mu(0) = +\mu_0$ correspond à l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante μ_0 sur $180°$.

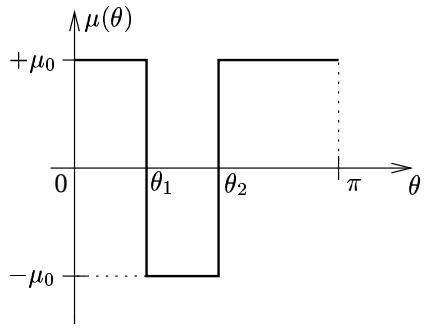


FIG. 3.3 – Exemple de coefficient d'atténuation $\mu(\theta)$ pour lequel notre méthode fonctionne ($N_d = 2$).

À partir des données du problème, il est possible de construire une équation intégrale en la fonction f donnée par

$$f = (\chi u_\infty) + Kf \tag{3.3}$$

qui est une équation intégrale dite de *Fredholm de seconde espèce*.

La fonction u_∞ est obtenue par la formule

$$u_\infty(\underline{x}) = \int_0^\pi d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{|\sigma|\geq\overline{\mu}_0} d\sigma\, |\sigma|\, e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}^\perp}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \tag{3.4}$$

où $\overline{\mu}_0 = \mu_0/2\pi$, qui consiste à appliquer l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées aux projections exponentielles de Radon $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$, mais pour lequel la rétroprojection est limitée à l'intervalle angulaire $[0, \pi[$ (voir section 2.2.2 sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle). $\chi(\underline{x})$ est la *fonction caractéristique* du domaine Ω_f, c'est-à-dire

$$\chi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.5}$$

tandis que K est un *opérateur linéaire borné*[1] qui s'applique à une fonction de $L^2(\Omega_f)$, ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω_f, et qui fournit une fonction de $L^2(\Omega_f)$. Nous noterons encore $K : L^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$. Pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$, l'opérateur linéaire K est défini par la relation

$$K\psi = \chi(w_\infty \otimes_2 \chi\psi) \tag{3.6}$$

où "$\otimes_2$" représente une convolution bidimensionnelle. La fonction $w_\infty(\underline{x})$ est indépendante des données du problème, c'est-à-dire de $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$; elle est définie par

$$\begin{aligned} w_\infty(\underline{x}) &= \sum_{k=0}^{N_d} a_k \int_{-1}^{+1} dp\, e^{\mu_0 p\underline{x}.\underline{\theta}_k} \int_{|\sigma|\geq\overline{\mu}_0|p|} d\sigma\, j\,\overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp} \\ &= \sum_{k=0}^{N_d} a_k \frac{\overline{\mu}_0}{\pi\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp} \left\{ \frac{\sinh\mu_0(\underline{x}.\underline{\theta}_k + j\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp)}{\mu_0(\underline{x}.\underline{\theta}_k + j\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp)} + \frac{\sinh\mu_0(\underline{x}.\underline{\theta}_k - j\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp)}{\mu_0(\underline{x}.\underline{\theta}_k - j\underline{x}.\underline{\theta}_k^\perp)} \right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $\underline{\theta}_k = (-\sin\theta_k, \cos\theta_k)$, $\underline{\theta}_k^\perp = (\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ pour $k = 1, \ldots, N_d$, $\underline{\theta}_0 = (0, 1)$ et $\underline{\theta}_0^\perp = (1, 0)$. La fonction "sinh" est la fonction sinus hyperbolique définie par $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Les coefficients a_k $(k = 0, ..., N_d)$ sont donnés par

$$a_0 = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu(0) = \mu_0 \text{ et } N_d \text{ pair} \\ 0 & \text{si } N_d \text{ impair} \\ -1 & \text{si } \mu(0) = -\mu_0 \text{ et } N_d \text{ pair} \end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$a_k = \begin{cases} +1 & \text{si la transition de } \mu(\theta) \text{ en } \theta_k \text{ se fait de } -\mu_0 \text{ à } +\mu_0 \\ -1 & \text{si la transition de } \mu(\theta) \text{ en } \theta_k \text{ se fait de } +\mu_0 \text{ à } -\mu_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

pour $k = 1, \ldots, N_d$.

[1] À l'annexe A.2, nous présentons un ensemble de rappels d'analyse fonctionnelle permettant de se familiariser avec les notations de ce chapitre.

Lorsque $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque la fonction $\mu(\theta)$ est identiquement nulle, le problème étudié ici se réduit à celui de l'inversion de la transformée de Radon $[\mathcal{R}_0 f](\theta, s)$ lorsque les projections sont connues pour $\theta \in [0, \pi[$. L'équation intégrale (3.3) se réduit alors à

$$f = \chi u_\infty \tag{3.10}$$

car la fonction $w_\infty(\underline{x})$ est alors identiquement nulle, ou encore à

$$f(\underline{x}) = \int_0^\pi d\theta \int_{\mathbb{R}} d\sigma \, |\sigma| \, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^\perp} \, [\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_0 f](\theta, \sigma) \tag{3.11}$$

qui constitue la formule FBP traditionnelle d'inversion de la transformée de Radon (voir section 2.2.3). Le problème est donc dans ce cas déjà résolu.

La reconstruction de f à partir de $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$, connue pour $(\theta, s) \in [0, \pi[\times\mathbb{R}$, nécessite la résolution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (3.3). Cette équation admet une solution *unique* et *stable* quelle que soit la valeur de μ_0, solution qui peut s'écrire sous la forme d'une série de Neumann

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} K^n(\chi u_\infty) = (1 + K + K^2 + K^3 + ...)(\chi u_\infty) \tag{3.12}$$

L'opérateur K^n est défini par récurrence de la manière suivante : pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$ et toute valeur entière $n \geq 1$, la fonction $K^n\psi$ est obtenue en appliquant l'opérateur K à la fonction $K^{n-1}\psi$, $K^0\psi$ étant identique à ψ. Lorsque la norme de l'opérateur K, notée $\|K\|$, est strictement inférieure à l'unité, la convergence de la série (3.12) est assurée.

Dans le cas où $\|K\| \geq 1$, nous introduisons un facteur de relaxation $\gamma \in [0, 1[$ dans l'équation intégrale (3.3) de la manière suivante :

$$f = \gamma\chi u_\infty + ((1 - \gamma)I + \gamma K) \, f \tag{3.13}$$

où I est l'opérateur identité. Cette équation est identique à (3.3) dans le sens où elle admet la même solution. Nous introduisons ainsi l'opérateur linéaire $\widehat{K} = ((1-\gamma)I + \gamma K)$. Si on attribue au facteur de relaxation γ la valeur optimale

$$\gamma_{opt} = \frac{1}{1 + \|K\|^2} \tag{3.14}$$

la norme de l'opérateur $\widehat{K}$ est toujours strictement inférieure à l'unité, quelle que soit la valeur de $\|K\|$. La solution de l'équation (3.13), et donc de (3.3), est alors fournie par

$$f = \gamma_{opt} \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{K}_{opt})^n \chi u_\infty \tag{3.15}$$

où $\widehat{K}_{opt} = ((1 - \gamma_{opt})I + \gamma_{opt}K)$.

Quelle que soit la valeur de $\|K\|$, il est toujours possible d'exprimer la solution de (3.3) sous la forme d'une série de Neumann. La formule (3.15) constitue la formule de reconstruction de f à partir de sa transformée de Radon exponentielle $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$ connue sur $[0, \pi[\times\mathbb{R}$. Remarquons que la valeur de la norme de l'opérateur K est essentiellement influencée par les valeurs de μ_0 et de D, rayon du domaine Ω_f délimitant la région d'émission. En particulier, plus le produit $\mu_0 D$ est petit, plus la norme de $\|K\|$ est petite également.

3.2.2 Cas particulier important

Nous allons à présent particulariser le résultat général que nous venons de présenter au problème de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$ avec atténuation constante μ_0, connue pour $(\theta, s) \in [0, \pi[\times\mathbb{R}$. Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, ce problème correspond à $N_d = 0$ et $\mu(\theta) = +\mu_0$ pour tout $\theta \in [0, \pi[$.

La fonction u_∞ apparaissant dans l'équation intégrale (3.3) devient

$$u_\infty(\underline{x}) = \int_0^\pi d\theta\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}} \int_{|\sigma| \geq \overline{\mu}_0} d\sigma\, |\sigma|\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^\perp}\, [\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, \sigma) \tag{3.16}$$

et correspond au résultat de l'application de l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées de Tretiak & Metz (voir section 2.2.3) aux projections exponentielles de Radon $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$, la rétroprojection étant limitée à l'intervalle angulaire $[0, \pi[$.

Étant donné que la fonction $\mu(\theta)$ ne présente aucune discontinuité sur $[0, \pi[$, seul subsiste, dans la somme (3.7), le terme dont le coefficient est a_0. En particulier, $a_0 = 1$. La fonction w_∞ servant à définir l'opérateur linéaire K se réduit alors à

$$\begin{aligned} w_\infty(\underline{x}) &= \int_{-1}^{+1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{|\sigma| \geq \overline{\mu}_0 |p|} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \mathrm{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \\ &= \frac{\overline{\mu}_0}{\pi x} \left\{ \frac{\sinh \mu_0 (y + jx)}{\mu_0 (y + jx)} + \frac{\sinh \mu_0 (y - jx)}{\mu_0 (y - jx)} \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

La formule de reconstruction de f est donnée par (3.12) ou (3.15) selon que la norme de l'opérateur K est inférieure ou supérieure à l'unité.

3.3 Dérivation de l'algorithme

Dans le but de démontrer les différentes formules apparaissant à la section 3.2, nous basons notre raisonnement sur un choix particulier de la fonction $\mu(\theta)$ correspondant

à $N_d = 2$ et $\mu(0) = +\mu_0$, en particulier celui de la figure 3.3. Au fur et à mesure de l'exposé, nous expliquons comment les résultats obtenus pour ce cas particulier peuvent être adaptés au cas général où $\mu(0) = \pm\mu_0$ et N_d est quelconque.

3.3.1 Une équation intégrale pour f

Dans cette section, nous dérivons l'équation intégrale (3.3) ainsi que les expressions (3.4) et (3.7) des fonctions u_∞ et w_∞.

La fonction $\mu(\theta)$ étant connue sur $[0, \pi[$, nous allons dans un premier temps la prolonger sur $[0, 2\pi[$ de la manière suivante :

$$\mu(\theta) = -\mu(\theta - \pi) \quad \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi[\tag{3.18}$$

c'est-à-dire que la fonction $\mu(\theta)$ est rendue anti-symétrique autour de π. La figure 3.4 illustre la situation sur l'exemple de fonction $\mu(\theta)$ que nous avons choisi. D'un point

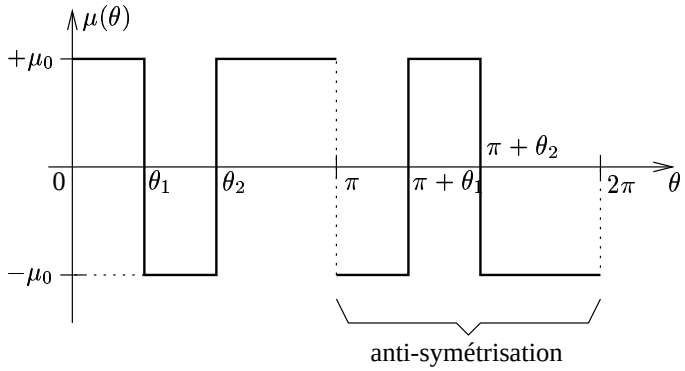


FIG. 3.4 – Anti-symétrisation de la fonction $\mu(\theta)$: $N_d = 2$.

de vue théorique, reconstruire f à partir de $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$ connue pour $(\theta, s) \in [0, \pi[\times\mathbb{R}$ est équivalent à reconstruire f à partir de cette même transformée mais connue pour $(\theta, s) \in [0, 2\pi[\times\mathbb{R}$. En effet, nous observons que

$$[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s) = \begin{cases} [\mathcal{R}_\mu f](\theta, s) & \text{si } \theta \in [0, \pi[\,,\ s \in \mathbb{R} \\ [\mathcal{R}_\mu f](\theta - \pi, -s) & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi[\,,\ s \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.19}$$

et donc la seule connaissance de $[\mathcal{R}_\mu f](\theta, s)$ pour $\theta \in [0, \pi[$ assure également sa connaissance pour $\theta \in [0, 2\pi[$. Le problème de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle $\mathcal{R}_\mu f$ sur 180 degrés équivaut ainsi à celui d'inverser cette même transformée sur 360 degrés. Néanmoins, la fonction $\mu(\theta)$ ainsi construite n'est pas dérivable et la formule FBP d'inversion développée au chapitre précédent ne peut être utilisée. Afin de tenir compte des discontinuités apparaissant dans la fonction $\mu(\theta)$, il est nécessaire de modifier la démonstration du chapitre précédent concernant l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle.

Construction d'une suite de fonctions f_n convergeant vers f

Pour rappel, le symbole $\otimes_2$ représente une convolution dans $\mathbb{R}^2$. Soit $L^2(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Nous montrons ci-après, que f est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la séquence $f_n = u_n + w_n \otimes_2 f$ où

$$u_n(\underline{x}) = \int_0^{\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\overline{\mu}_0 \le |\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, |\sigma|\, e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \tag{3.20}$$

et

$$w_n(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{N_d} a_k \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p\underline{x}.\underline{\theta}_k} \int_{\overline{\mu}_0|p| \le |\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2p^2}} d\sigma\, j\,\overline{\mu}_0\, \mathrm{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi\sigma\underline{x}.\underline{\theta}_k^{\perp}} \tag{3.21}$$

où $\overline{\mu}_0 = \mu_0/2\pi$, $\underline{\theta}_k$, $\underline{\theta}_k^{\perp}$ et a_k ont été définis pour $k = 0, \ldots, N_d$ à la section 3.2. Les séquences u_n et w_n convergent dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers les fonctions u_∞ et w_∞ respectivement. D'une manière formelle, nous écrivons

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w_\infty \tag{3.22}$$

où les fonctions u_∞ et w_∞ sont données aux équations (3.4) et (3.7), ainsi que

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (u_n + w_n \otimes_2 f) = u_\infty + w_\infty \otimes_2 f \tag{3.23}$$

Démonstration. La dérivation de (3.23) est basée sur le théorème du profil central de la transformée de Fourier que nous rappelons ici :

$$[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) = [\mathcal{F}_2 f](\sigma\underline{\theta}^{\perp} + j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta}) \tag{3.24}$$

Nous considérons dans un premier temps la fonction $\mu(\theta)$ de la figure 3.4, présentant des discontinuités en θ_1, θ_2, $\pi + \theta_1$ et $\pi + \theta_2$. Comme au chapitre précédent, nous introduisons deux fonctions $\omega(\theta,\sigma)$ et $\alpha(\theta,\sigma)$ telles que

$$\sigma = \omega\, \cos\alpha, \qquad j\overline{\mu}(\theta) = \omega\, \sin\alpha \tag{3.25}$$

Pour $|\sigma| > |\overline{\mu}(\theta)|$,

$$\omega = \sqrt{\sigma^2 - \overline{\mu}^2(\theta)}, \qquad \tan\alpha = j\overline{\mu}(\theta)/\sigma \tag{3.26}$$

Avec les définitions de $\underline{\theta}^{\perp}$ et $\underline{\theta}$, le théorème du profil central de la transformée de Fourier prend la forme

$$[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) = [\mathcal{F}_2 f]\,(\omega\, \cos(\theta+\alpha), \omega\, \sin(\theta+\alpha)) \tag{3.27}$$

À présent, la fonction f est exprimée comme l'inverse de sa transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ en coordonnées polaires :

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \tag{3.28}$$

avec

$$f_n(x,y) = \int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos\theta + y\,\sin\theta)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos\theta, \widehat{\omega}\,\sin\theta) \tag{3.29}$$

Soient $z = \theta + j\tau$ et $C_0 = \{z \in \mathbb{C} : \theta \in [0, 2\pi[,\ \tau = 0\}$. L'intégrale en θ de l'équation (3.29) peut être vue comme une intégrale dans le plan complexe de z le long de la courbe C_0, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos\theta + y\,\sin\theta)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos\theta, \widehat{\omega}\,\sin\theta)\\ &\qquad = \int_{C_0} dz\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos z + y\,\sin z)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z)\end{aligned} \tag{3.30}$$

Vu que f est bornée et à support compact, $[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z)$ est une fonction analytique entière en la variable z. Le théorème d'intégration de Cauchy[2] est utilisé pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos\theta + y\,\sin\theta)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos\theta, \widehat{\omega}\,\sin\theta)\\ &\qquad = \sum_{i=1}^{13} \int_{C_i} dz\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\,\cos z + y\,\sin z)}\,[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\,\cos z, \widehat{\omega}\,\sin z)\end{aligned} \tag{3.31}$$

où les courbes C_i forment un contour fermé avec C_0. La figure 3.5 illustre ces courbes et indique leur orientation dans le plan complexe. Sur cette figure, $\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})$ est défini par

$$\tan\widehat{\alpha}(\widehat{\omega}) = \frac{j\overline{\mu}_0}{\sqrt{\widehat{\omega}^2 + \overline{\mu}^2(\theta)}} \tag{3.32}$$

et est indépendant de θ car $\overline{\mu}^2(\theta) = \overline{\mu}_0^2$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$.

L'utilisation de la formule (3.31) dans l'expression de $f_n(x,y)$ fournit

$$f_n(x,y) = f_n^{(1)}(x,y) + f_n^{(2)}(x,y) \tag{3.33}$$

où $f_n^{(1)}(x,y)$ est la contribution des courbes C_2, C_4, C_6, C_8, C_{10} et C_{12} et $f_n^{(2)}(x,y)$ est la contribution des courbes C_1, C_3, C_5, C_7, C_9, C_{11} et C_{13}.

[2]Le théorème d'intégration de Cauchy est rappelé à l'annexe A.3.

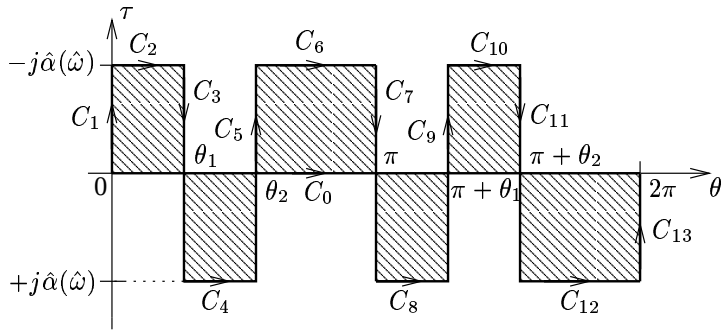


FIG. 3.5 – Définition des courbes C_i, $i = 1, \ldots, 13$ formant un domaine fermé avec C_0.

Développons tout d'abord l'expression de $f_n^{(1)}(x,y)$. Par définition des courbes d'indice pair,

$$
\begin{aligned}
f_n^{(1)}(x,y) = &\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_0^{\theta_1} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta+\widehat{\alpha})+y\sin(\theta+\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta+\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta+\widehat{\alpha}))\\
&+\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta-\widehat{\alpha})+y\sin(\theta-\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta-\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta-\widehat{\alpha}))\\
&+\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{\theta_2}^{\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta+\widehat{\alpha})+y\sin(\theta+\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta+\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta+\widehat{\alpha}))\\
&+\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{\pi}^{\pi+\theta_1} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta-\widehat{\alpha})+y\sin(\theta-\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta-\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta-\widehat{\alpha}))\\
&+\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{\pi+\theta_1}^{\pi+\theta_2} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta+\widehat{\alpha})+y\sin(\theta+\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta+\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta+\widehat{\alpha}))\\
&+\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{\pi+\theta_2}^{2\pi} d\theta\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta-\widehat{\alpha})+y\sin(\theta-\widehat{\alpha}))}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta-\widehat{\alpha}),\widehat{\omega}\sin(\theta-\widehat{\alpha}))
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Après avoir permuté l'ordre d'intégration entre les variables $\widehat{\omega}$ et θ, nous considérons $\theta \in [0, 2\pi[$ comme un paramètre fixé et appliquons le changement de variable

$$\widehat{\omega} = \sqrt{\sigma^2 - \overline{\mu}^2(\theta)}, \quad \sigma \geq \overline{\mu}_0 \tag{3.35}$$

Ce changement de variable est tel que

$$\sigma\, d\sigma = \widehat{\omega}\, d\widehat{\omega},\ \widehat{\omega} = \omega(\theta,\sigma) \tag{3.36}$$

et

$$\widehat{\alpha}(\widehat{\omega}) = \begin{cases} \alpha(\theta,\sigma) & \text{si } \theta \in [0,\theta_1[\cup[\theta_2,\pi[\cup[\pi+\theta_1,\pi+\theta_2[\\ -\alpha(\theta,\sigma) & \text{si } \theta \in [\theta_1,\theta_2[\cup[\pi,\pi+\theta_1[\cup[\pi+\theta_2,2\pi[\end{cases} \tag{3.37}$$

où $\alpha(\theta,\sigma)$ et $\omega(\theta,\sigma)$ sont les fonctions introduites en (3.25) et (3.26). En utilisant (3.35) avec le théorème du profil central de la transformée de Fourier (3.24), il vient

$$f_n^{(1)}(x,y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{\overline{\mu}_0}^{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, \sigma\, e^{j2\pi \underline{x}.(\sigma\underline{\theta}^{\perp}+j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta})}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma)$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{\overline{\mu}_0}^{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, \sigma\, e^{j2\pi \underline{x}.(\sigma\underline{\theta}^{\perp}+j\overline{\mu}(\theta)\underline{\theta})}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \qquad (3.38)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$f_n^{(1)}(x,y) = \int_0^{\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\overline{\mu}_0}^{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, \sigma\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma)$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\overline{\mu}_0}^{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, \sigma\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \qquad (3.39)$$

Vu que la fonction $\mu(\theta)$ est anti-symétrique par rapport à π, nous observons que $[\mathcal{R}_\mu f](\theta,s) = [\mathcal{R}_\mu f](\theta-\pi,-s)$ pour $\theta \in [\pi, 2\pi[$ (voir équation (3.19)). Cette relation implique que $[\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) = [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta-\pi,-\sigma)$ pour $\theta \in [\pi, 2\pi[$. Les changements de variables $\theta' = \theta - \pi$, $\sigma' = -\sigma$, suivis de la substitution de θ' par θ et celle de σ' par σ dans le second terme de (3.39) mènent à

$$f_n^{(1)}(x,y) = \int_0^{\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\overline{\mu}_0}^{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, \sigma\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma)$$

$$+ \int_0^{\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{-\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0}}^{-\overline{\mu}_0} d\sigma\, (-\sigma)\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \qquad (3.40)$$

Dès lors,

$$f_n^{(1)}(x,y) = \int_0^{\pi} d\theta\, e^{-\mu(\theta)\underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\overline{\mu}_0 \le |\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0}} d\sigma\, |\sigma|\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}^{\perp}}\, [\mathcal{F}_1\mathcal{R}_\mu f](\theta,\sigma) \qquad (3.41)$$

Nous observons que $f_n^{(1)}$ est identique à la fonction u_n définie à l'équation (3.20).

Développons à présent l'expression de $f_n^{(2)}(x,y)$ de (3.33). Étant donnée la définition des courbes d'indice impair (voir figure 3.5),

$$f_n^{(2)}(x,y) = j \int_0^{n} d\widehat{\omega}\, \widehat{\omega} \int_0^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos j\tau + y \sin j\tau)} [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos j\tau, \widehat{\omega}\sin j\tau)$$

$$-j \int_0^{n} d\widehat{\omega}\, \widehat{\omega} \int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta_1+j\tau)+y\sin(\theta_1+j\tau))}$$

$$[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta_1+j\tau), \widehat{\omega}\sin(\theta_1+j\tau))$$

$$
\begin{aligned}
&+j\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta_2+j\tau)+y\sin(\theta_2+j\tau))}\\
&\qquad\qquad [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta_2+j\tau),\widehat{\omega}\sin(\theta_2+j\tau))\\
&-j\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{-j2\pi\widehat{\omega}(x\cos j\tau+y\sin j\tau)}[\mathcal{F}_2 f](-\widehat{\omega}\cos j\tau,-\widehat{\omega}\sin j\tau)\\
&+j\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\pi+\theta_1+j\tau)+y\sin(\pi+\theta_1+j\tau))}\\
&\qquad\qquad [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\pi+\theta_1+j\tau),\widehat{\omega}\sin(\pi+\theta_1+j\tau))\\
&-j\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\pi+\theta_2+j\tau)+y\sin(\pi+\theta_2+j\tau))}\\
&\qquad\qquad [\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\pi+\theta_2+j\tau),\widehat{\omega}\sin(\pi+\theta_2+j\tau))\\
&+j\int_0^n d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{0} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos j\tau+y\sin j\tau)}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos j\tau,\widehat{\omega}\sin j\tau) \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Les premier, quatrième et dernier termes de cette somme correspondent respectivement aux contributions des courbes C_1, C_7, C_{13} et vont être associés. De plus, les contributions des courbes C_3 et C_9 sont associées, ainsi que celles de C_5 et C_{11}, pour obtenir

$$
\begin{aligned}
f_n^{(2)}(x,y) = a_0\, j\int_{-n}^{n} d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos j\tau+y\sin j\tau)}[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos j\tau,\widehat{\omega}\sin j\tau)\\
+\sum_{k=1}^{2} a_k\, j\int_{-n}^{n} d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{+j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(x\cos(\theta_k+j\tau)+y\sin(\theta_k+j\tau))}\\
[\mathcal{F}_2 f](\widehat{\omega}\cos(\theta_k+j\tau),\widehat{\omega}\sin(\theta_k+j\tau)) \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

vu que $\widehat{\alpha}(-\widehat{\omega}) = \widehat{\alpha}(\widehat{\omega})$ (voir équation (3.32)). Dans (3.43), $a_0 = +1$, $a_1 = -1$ et $a_2 = +1$. En utilisant la définition de la transformée de Fourier de f et en introduisant les notations $\underline{\theta}_k = (-\sin\theta_k, \cos\theta_k)$, $\underline{\theta}_k^{\perp} = (\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ pour $k = 1,\ 2$, $\underline{\theta}_0 = (0,1)$ et $\underline{\theta}_0^{\perp} = (1,0)$, cette dernière équation devient

$$
f_n^{(2)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} dx'\,dy'\, f(x',y')\, h_n(x-x',y-y') \qquad (3.44)
$$

avec

$$
h_n(x,y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, j\int_{-n}^{n} d\widehat{\omega}\,\widehat{\omega}\int_{j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})}^{-j\widehat{\alpha}(\widehat{\omega})} d\tau\, e^{j2\pi\widehat{\omega}(\underline{x}.\underline{\theta}_k^{\perp}\cos j\tau+\underline{x}.\underline{\theta}_k\sin j\tau)} \qquad (3.45)
$$

L'expression de h_n peut être simplifiée de la manière suivante. Tout d'abord, nous appliquons le changement de variable

$$
\tan j\tau = -\frac{j\overline{\mu}_0 p\,\mathrm{sign}(\widehat{\omega})}{\sqrt{\widehat{\omega}^2+\overline{\mu}_0^2 p^2}},\quad \cos j\tau = \frac{\sqrt{\widehat{\omega}^2+\overline{\mu}_0^2 p^2}}{|\widehat{\omega}|},\quad \sin j\tau = -\frac{j\overline{\mu}_0 p}{\widehat{\omega}} \qquad (3.46)
$$

avec $\widehat{\omega}$ fixé. Cela conduit à

$$h_n(x,y) = \sum_{k=0}^{2} a_k \int_{-n}^{n} d\widehat{\omega}\, \widehat{\omega} \int_{-1}^{1} dp\, \frac{j\overline{\mu}_0}{\sqrt{\widehat{\omega}^2 + \overline{\mu}_0^2 p^2}}\, e^{\mu_0 p \underline{x}.\underline{\theta}_k}\, e^{j2\pi \underline{x}.\underline{\theta}_k^{\perp}}\, \text{sign}(\widehat{\omega})\, \sqrt{\widehat{\omega}^2 + \overline{\mu}_0^2 p^2} \tag{3.47}$$

Ensuite, nous appliquons le changement de variable

$$\sigma^2 = \widehat{\omega}^2 + \overline{\mu}_0^2 p^2, \;\; \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\widehat{\omega}) \tag{3.48}$$

avec p fixé. Le résultat est

$$h_n(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{2} a_k \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p \underline{x}.\underline{\theta}_k} \int_{\overline{\mu}_0 |p| \leq |\sigma| \leq \sqrt{n^2 + \overline{\mu}_0^2 p^2}} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi\sigma \underline{x}.\underline{\theta}_k^{\perp}} \tag{3.49}$$

Cette dernière expression pour h_n est à comparer à la fonction w_n définie en (3.21). La preuve que nous venons de présenter concerne la fonction $\mu(\theta)$ donnée en exemple à la figure 3.4 ($N_d = 2$). Adaptons à présent ce résultat au cas plus général où N_d et $\mu(0)$ ($= \pm\mu_0$) sont quelconques.

Étudions tout d'abord comment le coefficient a_0 est déterminé à partir de $\mu(\theta)$. Remarquons que lorsque N_d est impair (voir exemple de la figure 3.6 pour $N_d = 1$), le coefficient a_0 est égal à zéro. En effet, dans ce cas, il n'y a pas de discontinuité en $\theta = \pi$ et les contributions des courbes $C_1\,(\theta = 0)$ et $C_7\,(\theta = 2\pi)$ se compensent. Lorsque N_d est pair, le signe de a_0 dépend uniquement de la valeur de la fonction $\mu(\theta)$ en zéro. Si $\mu(0) = +\mu_0$, le contour vertical C_1 est orienté dans le sens positif de l'axe τ et il en est de même pour le contour vertical localisé en $\theta = 2\pi$, C_{13} dans l'exemple de la figure 3.5. Par contre, le contour vertical correspondant à $\theta = \pi$ (C_7 sur notre exemple) est orienté dans le sens négatif de l'axe τ. Les contributions des contours verticaux situées en $\theta = 0$ (C_1), $\theta = \pi$ (C_7) et $\theta = 2\pi$ (C_{13}) se combinent et fournissent le coefficient $a_0 = +1$. Dans le cas où $\mu(0) = -\mu_0$, un raisonnement analogue conduit à $a_0 = -1$.

Établissons à présent la valeur des coefficients a_k pour $k = 1, \ldots, N_d$. Ceux-ci sont indépendants du nombre de discontinuités de la fonction $\mu(\theta)$. Ils ne dépendent que du sens de la transition de la fonction $\mu(\theta)$ à l'endroit de la discontinuité. Par exemple, si la fonction $\mu(\theta)$ présente une discontinuité, ou plutôt une transition en θ_k de $-\mu_0$ à $+\mu_0$, les calculs ci-avant ont montré que $a_k = +1$. De même, $a_k = -1$ si la fonction $\mu(\theta)$ présente une transition de sens opposé en θ_k. Les équations (3.8) et (3.9) reprennent les valeurs de a_k ($k = 0, \ldots, N_d$) pour n'importe quelles valeurs de N_d et $\mu(0)$.

Dès lors, $f_n^{(2)}$ est identique à la fonction $w_n \otimes_2 f$ utilisée pour définir $w_\infty \otimes_2 f$ de l'équation (3.23).

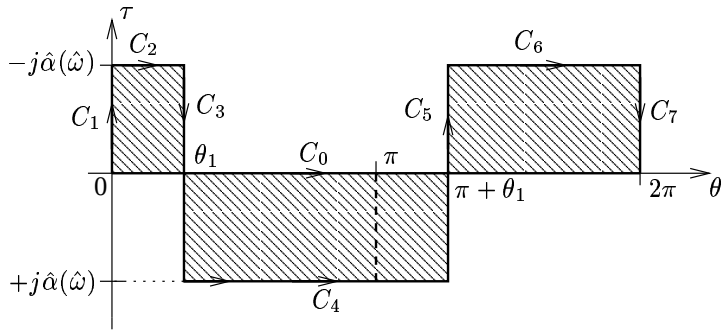


FIG. 3.6 – Illustration d'un contour du plan complexe de z pour $N_d = 1$.

En résumé, nous avons montré que la fonction f est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la séquence

$$f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} \tag{3.50}$$
$$= u_n + w_n \otimes_2 f \tag{3.51}$$

où u_n et w_n sont données respectivement par les équations (3.20) et (3.21). ■

Mise en forme de l'équation intégrale

Étant donnée la définition (3.5) de la fonction χ caractéristique du domaine Ω_f, nous pouvons écrire $f = \chi f$. Dès lors, f peut être vue comme la limite dans $L^2(\Omega_f)$ de la séquence $f_n = \chi u_n + \chi(w_n \otimes_2 \chi f)$. Nous avons démontré à l'annexe B.1 que la séquence $K_n\psi = \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi)$ converge dans $L^2(\Omega_f)$ pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$. Ce résultat permet d'introduire l'opérateur linéaire $K : L^2(\Omega_f) \to L^2(\Omega_f)$ tel que

$$K\psi = \lim_{n\to\infty} \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi), \quad \psi \in L^2(\Omega_f) \tag{3.52}$$

où la limite est considérée dans $L^2(\Omega_f)$. En particulier, nous avons

$$f = \chi u_\infty + Kf \tag{3.53}$$

Cette dernière équation constitue l'équation intégrale (3.3) en la fonction f. L'idée d'introduire la fonction χ a été suggérée par le travail de Palamodov [61].

3.3.2 Formule de reconstruction

Nous nous intéressons à présent à la résolution de l'équation intégrale (3.3) que nous retranscrivons ici

$$f = \chi u_\infty + Kf \tag{3.54}$$

où la fonction $\chi u_\infty \in L^2(\Omega_f)$ et K est l'opérateur linéaire défini en (3.52). Dans cette section, nous dérivons les expressions (3.12) et (3.15), selon la valeur de la norme de

l'opérateur K. Nous montrons ensuite que la solution de l'équation intégrale (3.54) est unique et stable dans $L^2(\Omega_f)$.

Tout d'abord, nous observons que $w_n(x,y)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire que $w_n(-x,-y) = -w_n(x,y)$. Cette relation se déduit de l'équation (3.21). Ayant posé $K_n\psi = \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi)$, nous avons alors la relation suivante

$$\langle K_n\psi_1, \psi_2\rangle = -\langle \psi_1, K_n\psi_2\rangle \tag{3.55}$$

pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 de $L^2(\Omega_f)$. L'expression $\langle \psi_1, \psi_2\rangle$ représente le produit scalaire dans $L^2(\Omega_f)$ des deux fonctions ψ_1 et ψ_2. Il vient ensuite

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = -\langle \psi_1, K\psi_2\rangle \tag{3.56}$$

pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 de $L^2(\Omega_f)$ car la suite $K_n\psi$ converge fortement vers $K\psi$ dans $L^2(\Omega_f)$ (c'est-à-dire que $\|K_n\psi - K\psi\| \to 0$). L'équation (3.56) indique que l'opérateur K est anti-symétrique. Vu que cette équation est valable pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 de $L^2(\Omega_f)$ et que K est un opérateur linéaire, nous déduisons du théorème de Hellingter-Toeplitz[3] que K est borné et que $(-K)$ est l'opérateur adjoint de K (voir chapitre 10.1 dans [41] pour plus de détails).

Nous venons donc de montrer que l'opérateur K est *borné* et *anti-symétrique*. Ces deux propriétés constituent un élément clé dans la résolution de l'équation intégrale (3.54). Étant donné qu'il est borné, l'opérateur K admet une norme, notée $\|K\|$, définie par

$$\|K\| = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\|K\psi\|}{\|\psi\|} \tag{3.57}$$

Nous montrons ci-après comment la valeur de cette norme conditionne la résolution de l'équation intégrale.

Premier cas : $\|K\| < 1$

Supposons tout d'abord que $\|K\| < 1$. Dans ce cas, l'équation (3.54) peut être utilisée de manière récursive pour obtenir

$$\begin{aligned} f &= \chi u_\infty + Kf \\ &= \chi u_\infty + K\left(\chi u_\infty + Kf\right) \\ &= \chi u_\infty + K\chi u_\infty + K^2\left(\chi u_\infty + Kf\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K^n \chi u_\infty \end{aligned} \tag{3.58}$$

[3]Le théorème de Hellingter-Toeplitz s'énonce de la manière suivante [41] : Soient K_1 et K_2 deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H. Si $(K_1\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, K_2\psi_2)$ pour toutes fonctions $\psi_1,\ \psi_2 \in H$, alors K_1 est borné et K_2 est appelé *opérateur adjoint* de K_1.

où l'opérateur K^n a été défini de manière récursive à la section précédente. La série (3.58) converge dans $L^2(\Omega_f)$ et est telle que

$$\|f\| < \frac{\|\chi u_\infty\|}{1 - \|K\|} \tag{3.59}$$

Lorsque $\|K\| < 1$, l'équation (3.54) admet donc une solution unique dans $L^2(\Omega_f)$. Cette solution est stable car χu_∞ est continue en tant que fonctionnelle linéaire de $[\mathcal{R}_\mu f]$. Cependant, la condition $\|K\| < 1$ n'est pas automatiquement satisfaite. Formellement, nous pouvons écrire $K\psi = \chi\,(w_\infty \otimes_2 \chi\psi)$ avec w_∞ donné par (3.7). Donc, la condition $\|K\| < 1$ ne sera satisfaite que pour de faibles valeurs du produit $\mu_0 D$ où D est le rayon de Ω_f. Ainsi, pour assurer la convergence de la série (3.58) pour une valeur de μ_0 fixée, la fonction f doit être confinée dans une région suffisamment petite autour de l'origine.

Deuxième cas : $\|K\| \geq 1$

Afin de lever la contrainte $\|K\| < 1$, nous introduisons dans l'équation (3.54) un facteur de relaxation $\gamma \in]0, 1]$ de la manière suivante

$$f = \gamma\chi u_\infty + ((1-\gamma)I + \gamma K)\, f \tag{3.60}$$

où I est l'opérateur identité. Cette équation est identique à (3.54) dans le sens où elle admet la même solution. Elle peut encore s'écrire sous la forme

$$f = \gamma\chi u_\infty + \widehat{K} f \tag{3.61}$$

où le nouvel opérateur $\widehat{K}$ est défini par $\widehat{K} = (1-\gamma)I + \gamma K$. Nous montrons ci-après que le facteur de relaxation γ peut être choisi de telle sorte que $||\widehat{K}|| < 1$ pour n'importe quelle valeur du produit $\mu_0 D$. Cette propriété est une conséquence directe de l'anti-symétrie de l'opérateur K. Pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$,

$$\begin{aligned} ||\widehat{K}\psi||^2 &= \left\langle \widehat{K}\psi, \widehat{K}\psi \right\rangle \\ &= (1-\gamma)^2 \|\psi\|^2 + \gamma^2 \|K\psi\|^2 \end{aligned} \tag{3.62}$$

où nous avons utilisé la propriété de distributivité du produit scalaire. Après division de l'équation précédente par $\|\psi\|^2$ et le calcul de la borne supérieure, il vient

$$||\widehat{K}||^2 = (1-\gamma)^2 + \gamma^2 \|K\|^2 \tag{3.63}$$

De ce résultat, nous observons que la norme de l'opérateur $\widehat{K}$ admet un minimum pour une valeur particulière γ_{opt} du facteur de relaxation :

$$\gamma_{opt} = \frac{1}{1 + \|K\|^2} \tag{3.64}$$

Nous notons $\widehat{K}_{opt}$ l'opérateur obtenu en remplaçant γ par γ_{opt}, c'est-à-dire $\widehat{K}_{opt} = (1-\gamma_{opt})I + \gamma_{opt}K$. La norme de ce nouvel opérateur est égale à

$$||\widehat{K}_{opt}|| = \frac{\|K\|}{\sqrt{1+\|K\|^2}} \tag{3.65}$$

qui est strictement inférieure à 1 quelle que soit la valeur de la norme de l'opérateur K.

En choisissant $\gamma = \gamma_{opt}$ dans (3.61), l'équation intégrale devient

$$f = \gamma_{opt}\chi u_\infty + \widehat{K}_{opt} f \tag{3.66}$$

avec $||\widehat{K}_{opt}|| < 1$. Utilisant la même approche récursive que dans le cas précédent, nous obtenons

$$f = \gamma_{opt} \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{K}_{opt})^n \chi u_\infty \tag{3.67}$$

Cette série converge dans $L_2(\Omega_f)$ pour n'importe quelle valeur de $\mu_0 D$.

L'équation (3.67) définit une solution unique et stable de l'équation intégrale (3.61) et par la même occasion de l'équation intégrale (3.54). Pour cette solution, nous avons

$$\|f\| < \frac{\gamma_{opt}\,\|\chi u_\infty\|}{1-||\widehat{K}_{opt}||} \tag{3.68}$$

ce qui montre que la norme de f est bornée et assure la stabilité de la solution.

3.4 Vérification de la méthode

Nous proposons ici de montrer que la méthode décrite ci-avant fournit des images de bonne qualité. Nous nous limiterons cependant au cas particulier important de l'inversion de la transformée de Radon exponentielle $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$ connue sur un demi-tour complet, c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \pi[$.

3.4.1 Détails d'implémentation

La reconstruction d'une fonction bidimensionnelle f à partir de la formule (3.67) peut être implémentée de la manière suivante :

• **Étape 1.** Calculer l'image $f_0 = \chi u_\infty$ à partir des projections $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$ disponibles par la formule (3.16).
• **Étape 2.** Calculer l'image $f_n = \widehat{K}_{opt}\, f_{n-1} = (1-\gamma_{opt}) f_{n-1} + \gamma_{opt} K f_{n-1}$ pour $n = 1, \ldots, N$, avec γ_{opt} donné par l'équation (3.64).

• **Étape 3.** Calculer l'image $f_N \simeq \gamma_{opt} \sum_{n=0}^{N} f_n$.

L'image f_N représente l'image reconstruite. Elle correspond à la série (3.67) limitée à $(N+1)$ termes. La précision de la reconstruction, que l'on peut assimiler à $\|f_N - f\|$, dépend essentiellement de la norme de l'opérateur K. En absence de bruit dans les données, plus $\|K\|$ est petite, plus $||\widehat{K}_{opt}||$ est petite également (voir formule (3.65)) et plus le nombre $(N+1)$ peut être limité pour une précision donnée. En effet, plus $||\widehat{K}_{opt}||$ est petite et plus la série (3.67) converge rapidement.

Nous allons à présent nous attarder sur l'implémentation des trois étapes nécessaires au calcul de f_N et en estimer le nombre d'opérations.

Implémentation de l'étape 1

Cette étape de la reconstruction est une étape relativement commune en tomographie. De l'équation (3.16), nous observons que u_∞ est simplement le résultat de l'application de l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées de Tretiak & Metz [69] aux projections disponibles, la rétroprojection étant limitée à l'intervalle angulaire $[0, \pi[$. Pour obtenir u_∞, les projections exponentielles de Radon $[\mathcal{R}_{\mu_0} f](\theta, s)$ sont tout d'abord filtrées

$$[\mathcal{R}_{\mu_0} f]^F(\theta, s) = 2 \int_{\mathbb{R}} ds'\, k_{\mu_0}(s - s')\, [\mathcal{R}_{\mu} f](\theta, s), \quad \theta \in [0, \pi[\tag{3.69}$$

où, pour rappel, k_{μ_0} est donné par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_0}](\sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} & \text{si } |\sigma| \geq \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.70}$$

Néanmoins, le filtre k_{μ_0} étant défini au sens de la théorie des distributions, il est nécessaire de le régulariser par l'utilisation d'une fenêtre d'apodisation :

$$k^r_{\mu_0}(s) = \int_{\overline{\mu}_0 \leq |\sigma| \leq 1/(2\Delta s)} d\sigma\, \frac{|\sigma|}{2}\, \frac{1 + \cos \pi t}{2}\, e^{j 2\pi s \sigma} \tag{3.71}$$

où $k^r_{\mu_0}$ est la version régularisée (ou apodisée) de k_{μ_0}, Δs est le pas d'échantillonnage en s des projections et où nous avons opté pour la fenêtre d'apodisation de Hanning $(1 + \cos \pi t)/2$. De plus, $1/(2\Delta s)$ est la fréquence de Nyquist correspondant à l'échantillonnage des projections. Ensuite, nous remplaçons k_{μ_0} par $k^r_{\mu_0}$ dans (3.69), nous discrétisons[4] l'intégrale et utilisons la transformée de Fourier rapide pour calculer les échantillons de $[\mathcal{R}_{\mu_0} f]^F(\theta, s)$. Si l'on dispose de N_θ projections échantillonnées sur N_s points, le nombre d'opérations requis pour le filtrage des projections est alors égal

[4] Dans la suite, nous utiliserons le terme *discrétiser* pour indiquer le passage du domaine continu au domaine discret.

proportionnel à $N_\theta N_s \log N_s$.

Une fois les projections filtrées, la valeur de u_∞ en un point (x, y) est obtenue par rétroprojection selon la formule

$$u_\infty(x,y) = \int_0^\pi d\theta \, e^{-\mu_0(-x \sin\theta + y \cos\theta)} \, [\mathcal{R}_{\mu_0} f]^F(\theta, s = x \cos\theta + y \sin\theta) \qquad (3.72)$$

que nous discrétisons de la manière suivante :

$$u_\infty(x,y) = \Delta\theta \sum_{i=0}^{N_\theta - 1} e^{-\mu_0(-x \sin\theta_i + y \sin\theta_i)} \, [\mathcal{R}_{\mu_0} f]^F(\theta_i, s = x \cos\theta_i + y \sin\theta_i) \quad (3.73)$$

où $\theta_i = i\,\Delta\theta$ avec $\Delta\theta = \pi/N_\theta$. Si l'image u_∞ est calculée sur une grille carrée de $N_x \times N_y$ pixels, le nombre d'opérations pour la rétroprojection est proportionnel à $N_x N_y N_\theta$.

Si à présent, $N_\theta \simeq N_s \simeq N_x = N_y = M$, le nombre d'opérations nécessaires au calcul de u_∞ est de l'ordre de M^3.

Implémentation de l'étape 2

Cette étape nécessite une méthode qui calcule le résultat de l'application de l'opérateur K sur une image donnée $\psi(x, y)$ et une méthode qui calcule la norme $\|K\|$ nécessaire au calcul de γ_{opt} (formule (3.64)).

Commençons par expliquer comment nous avons implémenté $K\psi = \chi(w_\infty \otimes_2 \chi\psi)$ pour une image donnée $\psi(x, y)$. Supposons que la fonction $\chi\psi$ soit connue sur une grille carrée de pixels

$$(x_k, y_l) = (x_0 + k\,\Delta x, y_0 + l\,\Delta y), \quad k = 0, \ldots, (N_x - 1) \text{ et } l = 0, \ldots, (N_y - 1) \quad (3.74)$$

où $N_x = N_y$, $\Delta x = \Delta y = 2D/N_x = d$ et $x_0 = y_0 = -D + \Delta x/2$ afin d'assurer que la grille soit centrée à l'origine du système d'axes (x, y). Pour calculer $K\psi$, nous utilisons la formule de convolution discrète suivante

$$(w_\infty \otimes_2 \chi\psi)(x_k, y_l) = d^2 \sum_{k'=0}^{N_x - 1} \sum_{l'=0}^{N_y - 1} w_\infty^r((k - k')d, (l - l')d) \; (\chi\psi)(x_{k'}, y_{l'}) \quad (3.75)$$

pour $k = 0, \ldots, (N_x - 1)$ et $l = 0, \ldots, (N_y - 1)$. Dans cette dernière formule, la fonction w_∞^r est une version régularisée de w_∞ définie ci-après. Après mise à zéro des pixels situés en dehors de Ω_f, nous obtenons une estimation de $K\psi$.

La régularisation de la fonction w_∞ dans (3.75) est indispensable car w_∞ est singulière le long de la ligne $x = 0$. La définition de w_∞^r est basée sur une expression modifiée de la formule (3.17) pour w_∞ :

$$\begin{aligned} w_\infty(x,y) &= \frac{\sinh(\mu_0 y)}{\pi y} H(x) - \int_{-1}^{+1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{|\sigma| \le \overline{\mu}_0 |p|} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0 \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \quad (3.76) \\ &= \frac{\sinh(\mu_0 y)}{\pi y} H(x) \\ &\quad + \frac{\overline{\mu}_0}{\pi x} \left\{ \frac{2\,\sinh(\mu_0 y)}{\mu_0 y} - \frac{\sinh(\mu_0(y+jx))}{\mu_0(y+jx)} - \frac{\sinh(\mu_0(y-jx))}{\mu_0(y-jx)} \right\} \end{aligned}$$

où

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} d\sigma\, j\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \quad (3.77)$$

est le noyau de convolution de la transformée de Hilbert. Dans (3.76), nous remplaçons $H(x)$ par la version régularisée suivante

$$H^r(x) = \int_{|\sigma| < 1/(2d)} d\sigma\, j\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} = \frac{\cos(\pi x/d) - 1}{\pi x} \quad (3.78)$$

où $1/(2d)$ est la fréquence de Nyquist correspondant à l'échantillonnage de l'image. Nous obtenons alors l'expression suivante

$$\begin{aligned} w_\infty^r(x,y) &= \frac{\sinh(\mu_0 y)}{\pi y} H^r(x) \quad (3.79) \\ &\quad + \frac{\overline{\mu}_0}{\pi x} \left\{ \frac{2\,\sinh(\mu_0 y)}{\mu_0 y} - \frac{\sinh(\mu_0(y+jx))}{\mu_0(y+jx)} - \frac{\sinh(\mu_0(y-jx))}{\mu_0(y-jx)} \right\} \end{aligned}$$

Nous utilisons un algorithme de transformée de Fourier 2D rapide pour le calcul de la convolution (3.75). Dès lors, si $N_x = N_y = M$, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de $K\psi$ est proportionnel à $M^2 \log M$.

Nous montrons à présent comment nous avons estimé la norme de l'opérateur K. L'idée consiste à utiliser la méthode de la puissance pour le calcul de la valeur propre maximale de l'opérateur $K^\# K$, où $K^\# = -K$ est l'opérateur adjoint de K. La racine carrée de cette valeur propre est mathématiquement égale à $\|K\|$. Utilisant la méthode de la puissance, $\|K\|$ est la limite de la séquence β_n générée au travers du processus itératif suivant

$$\eta_n = K\psi_{n-1}, \quad \xi_n = -K\eta_n, \quad \beta_n = \|\eta_n\|, \quad \psi_n = \xi_n / \|\xi_n\|, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (3.80)$$

où ψ_0 est une image arbitraire non-nulle (voir [35] pour plus de détails). Dans ce processus, l'application de l'opérateur K aux images ψ_{n-1} et η_n est réalisée en utilisant (3.75). Notons qu'une grande précision sur $\|K\|$ n'est pas nécessaire. Dès lors, seules quelques itérations suffisent.

Implémentation de l'étape 3

Cette étape est triviale et présente un nombre d'opérations proportionnel à NM^2 où $(N+1)$ est le nombre de termes de la série et $M = N_x = N_y$.

En conclusion, le nombre d'opérations nécessaires au calcul de f_N est de l'ordre de M^3 pour autant que $N \ll M$.

3.4.2 Reconstructions

La formule de reconstruction (3.67) a été testée sur des données simulées à partir d'un fantôme 3D simplifié du cœur composé de trois ellipsoïdes. Une description complète de ce fantôme est donnée à l'annexe C.1. Les données de la simulation correspondent à un jeu de projections parallèles exponentielles idéales, c'est-à-dire calculées de manière analytique sur base des définitions des ellipsoïdes constituant le fantôme.

La géométrie d'acquisition des projections parallèles exponentielles est une géométrie "pseudo-3D" (voir section 2.4.3). Le fantôme 3D du cœur a donc été considéré comme un empilement de tranches bidimensionnelles, perpendiculaires au vecteur unitaire $\underline{e}_z$, reconstruites chacune par la méthode d'inversion 2D présentée dans ce chapitre. L'image 3D reconstruite est obtenue par empilement des différentes tranches.

Échantillonnage de l'image et des projections

L'image 3D f est reconstruite sur une grille cubique de $N_x \times N_y \times N_z$ voxels où $N_x = N_y = N_z = 100$, centrée à l'origine du référentiel. Chaque voxel est de forme cubique et de taille $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$. Nous considérons donc un volume de reconstruction cubique de taille $150\text{mm} \times 150\text{mm} \times 150\text{mm}$ centré à l'origine.

Les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ ont été simulées pour un coefficient d'atténuation $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$. Cette valeur est relativement plus élevée que les valeurs typiques d'atténuation rencontrées en imagerie SPECT. Nous avons en effet voulu tester notre algorithme pour une valeur d'atténuation plus sévère afin de montrer son exactitude. Les projections sont échantillonnées de la manière suivante :

$$\theta_i = i\,\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/N_\theta, \quad i = 0, \ldots, (N_\theta - 1) \tag{3.81}$$

où $N_\theta = 180$, ce qui correspond à 180 projections parallèles exponentielles simulées sur $180°$ avec un pas angulaire de $1°$. Pour chaque valeur de θ_i, la projection est simulée sur une grille de $N_s \times N_z$ pixels carrés de taille $\Delta s \times \Delta z$ centré à l'origine, où $N_s = N_z = 100$ et $\Delta s = \Delta z = 1.5\text{mm}$. Il est à noter que l'image 3D f et les projections ont été échantillonnées selon la variable z de la même manière.

Il vient alors que 100 tranches perpendiculaires à $\underline{e}_z$ sont reconstruites de manière indépendante. Pour chacune de ces tranches, le paramètre D a été choisi égal à 70mm étant donné que le fantôme utilisé est entièrement inclus dans un cylindre de rayon 70mm et dont l'axe est parallèle à $\underline{e}_z$.

Résultats de la reconstruction

Les figures 3.7 et 3.8 montrent les résultats de la reconstruction. Elles correspondent toutes deux à la même reconstruction mais à deux mises à l'échelle linéaire différentes des niveaux de gris. La première mise à l'échelle (figure 3.7) porte sur toute la dynamique de l'image, c'est-à-dire $[-0.05, 1.05]$. En d'autres termes, la couleur noire est attribuée à la valeur -0.05, ainsi qu'aux niveaux inférieurs à -0.05 et la couleur blanche est attribuée à la valeur 1.05, ainsi qu'aux niveaux supérieurs à 1.05. Entre ces deux valeurs, une échelle linéaire de niveaux de gris est utilisée. La seconde mise à l'échelle (figure 3.8) porte sur l'intervalle $[0.8, 1.2]$ centré sur la valeur 1 de l'activité présente dans les parois du cœur. La couleur noire est attribuée à la valeur 0.8, ainsi qu'au niveaux inférieurs à 0.8 tandis que la couleur blanche est attribuée à la valeur 1.2, ainsi qu'aux niveaux supérieurs à 1.2. Entre ces deux valeurs, une échelle linéaire de niveaux de gris est utilisée. Cette dernière mise à l'échelle des niveaux de gris permet de mieux faire apparaître les non-uniformités éventuelles des niveaux dans la reconstruction.

Sur les figures 3.7 et 3.8, la première ligne correspond au fantôme discrétisé idéal. La seconde ligne correspond à l'empilement, dans la direction $\underline{e}_z$, des fonctions u_∞ correspondant à chaque tranche $f_z(x, y)$. Elle correspond donc à l'utilisation de la formule de rétroprojection des projections filtrées de Tretiak & Metz appliquée sur $180°$. Ce résultat montre bien l'inefficacité de cet algorithme à traiter des données sur un demi-tour d'acquisition. La troisième ligne des figures 3.7 et 3.8 correspond à l'empilement des tranches reconstruites indépendamment par la formule (3.67) où nous avons limité le nombre de termes de la série à 12, c'est-à-dire pour $N = 11$. Pour chacune de ces tranches, la norme de l'opérateur K a été estimée à $\|K\| = 1.0631$. Donc, la convergence de la série n'était pas assurée sans relaxation. L'opérateur relaxé $\widehat{K}_{opt}$ présente une norme égale à $||\widehat{K}_{opt}|| = 0.728$. Dans ce cas, le résultat de la reconstruction limitée à 12 termes présente une précision tout à fait acceptable.

3.4.3 Fonctions de transfert

Nous présentons ici les fonctions de transfert locales de l'algorithme pour les trois directions principales $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ et $\underline{e}_z$ et correspondant au point $(0, 0, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Les définitions et détails de calcul de ces fonctions sont donnés à l'annexe C.2. La figure 3.9 donne les fonctions de transfert pour les deux reconstructions correspondant à 1 et 12 termes. Remarquons que la gaussienne utilisée pour calculer les MTF a été

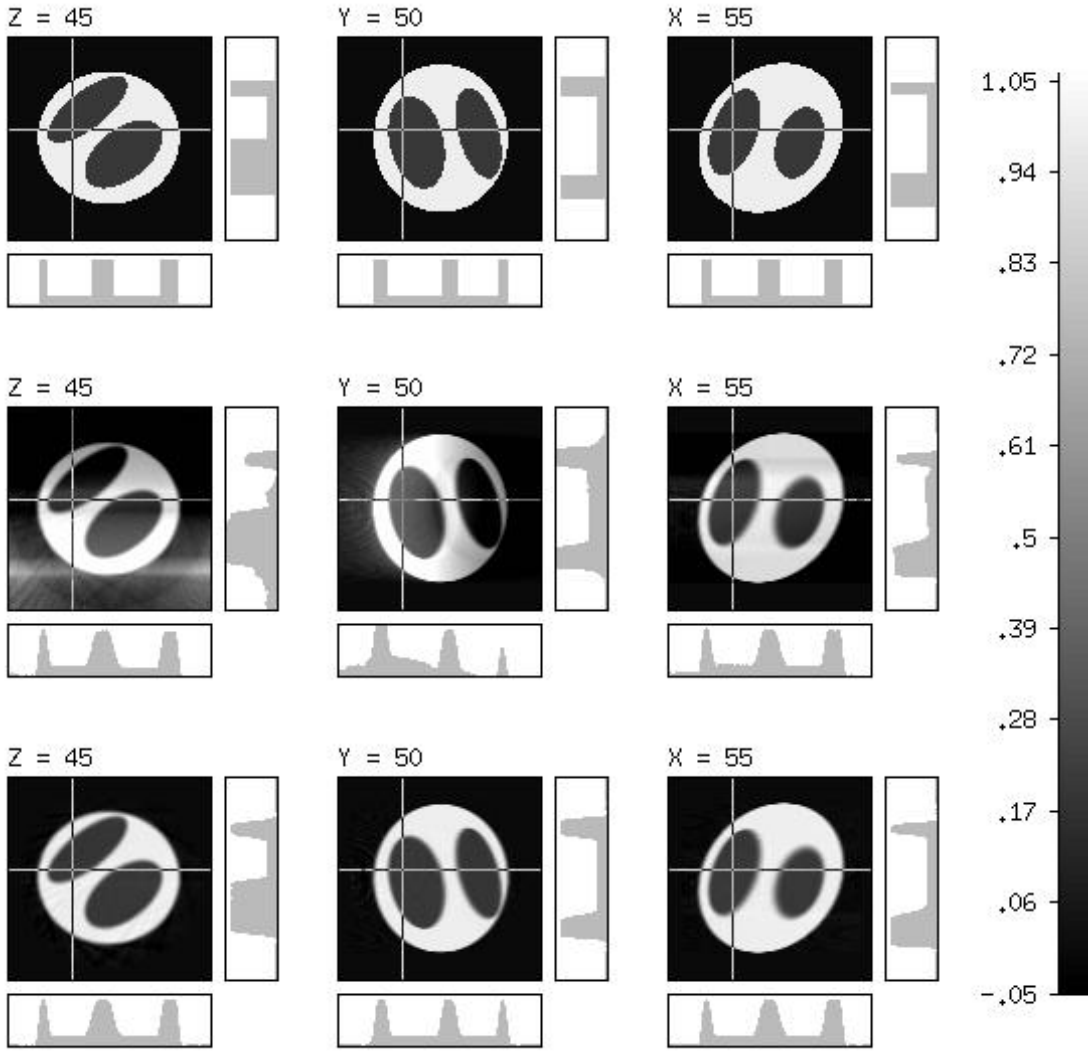


FIG. 3.7 – Résultats de la reconstruction. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : u_∞. 3ème ligne : reconstruction où la série à été limitée à 12 termes ($N = 11$).

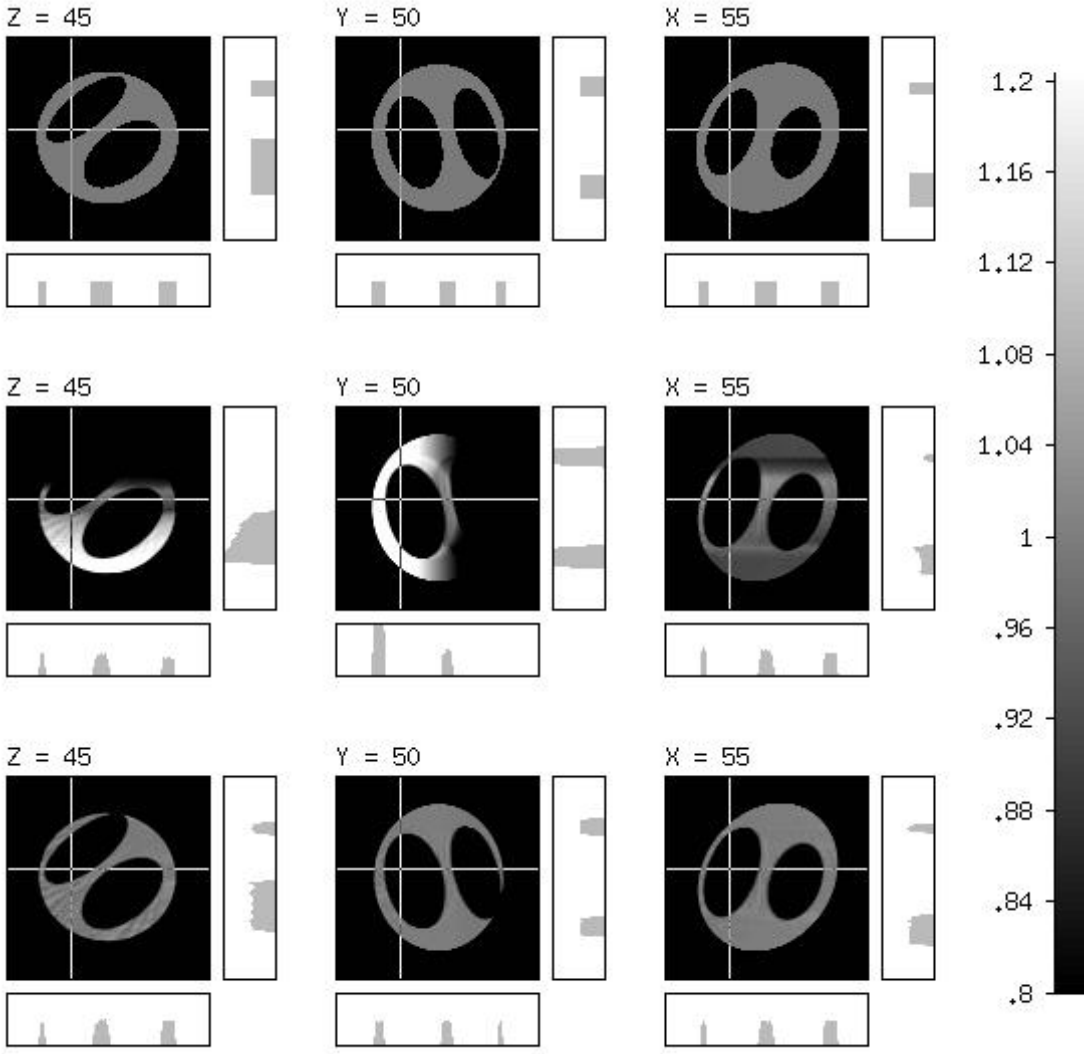
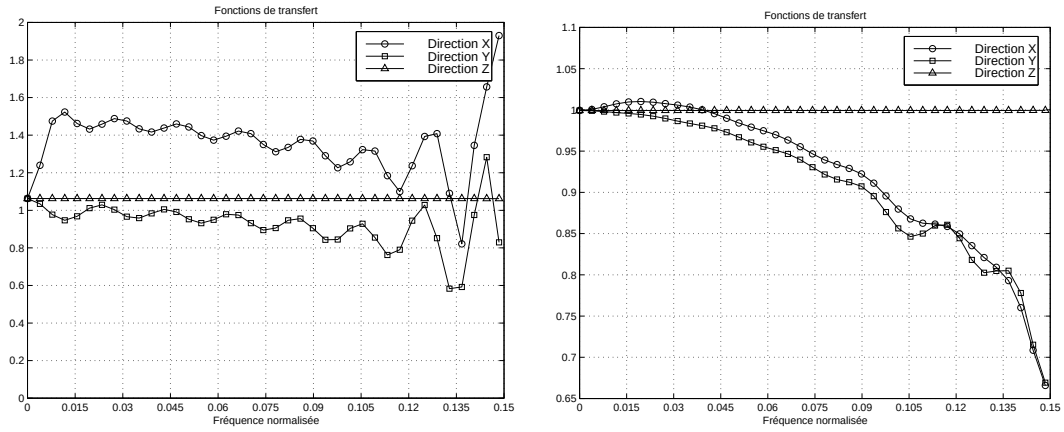


FIG. 3.8 – Résultats de la reconstruction. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : u_∞. 3ème ligne : reconstruction où la série à été limitée à 12 termes ($N = 11$).

reconstruite avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la reconstruction du fantôme du cœur.

Commentons la figure 3.9a correspondant à la reconstruction limitée à 1 terme, c'est-à-dire à l'application de l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées de Tretiak & Metz aux données sur $180°$. Les MTF montrent clairement une nette différence de résolution spatiale entre les directions $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$, phénomène déjà bien visible à la figure 3.8 (2ème ligne). Cela indique une très forte non-uniformité dans la reconstruction.

À la figure 3.9b, nous observons tout d'abord que la MTF_z est égale à 1 pour toutes les fréquences σ. La résolution spatiale est donc parfaite dans la direction $\underline{e}_z$. Ce résultat provient du caractère "pseudo-3D" de l'algorithme. Pour chaque tranche reconstruite, les données sont simulées de manière idéale et la reconstruction est réalisée indépendamment des autres tranches. Ainsi, aucune opération, pouvant provoquer une perte de résolution (interpolation, filtrage,...), n'est réalisée dans la direction $\underline{e}_z$. Ensuite, nous observons que les fonctions de transfert MTF_x et MTF_y sont assez similaires, ce qui indique une résolution spatiale assez uniforme dans chaque tranche perpendiculaire à $\underline{e}_z$.



(a) (b)

FIG. 3.9 – Fonctions de transfert locales de l'algorithme dans les trois directions principales $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ et correspondant au point $(0, 0, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. (a) Reconstruction limitée à 1 terme. (b) Reconstruction limitée à 12 termes. Notons que l'échelle des ordonnées n'est pas la même en (a) qu'en (b).

Chapitre 4

Acquisition sur une union de grands cercles

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la reconstruction d'une fonction tridimensionnelle f à partir d'un ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à un ensemble Ω de directions constitué d'une union de grands cercles de la sphère unitaire. Deux illustrations d'ensemble de ce type sont représentées à la figure 4.1. La méthode EXP-TTR (pour *EXPonential-True Three dimensional Reconstruction*) proposée ci-après est du type rétroprojection des projections filtrées et constitue une méthode dite "3D réelle" car f n'est plus vue comme un empilement de tranches 2D mais bien comme une véritable entité tridimensionnelle. Nous étudions également deux ensembles Ω particuliers : il s'agit de la sphère unitaire complète et d'une bande équatoriale de S^2 (figure 4.1b). Enfin, nous montrons que la méthode EXP-TTR généralise tous les résultats précédemment publiés sur l'inversion de la transformée rayons X exponentielle.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont originaux et ont fait l'objet d'un article [71] présenté à la conférence "2000 IEEE Medical Imaging Conference" ainsi que d'un article [72] paru dans le journal "IEEE Transactions on Nuclear Science".

4.1 Motivation

Le problème de la reconstruction de f à partir d'un ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à un ensemble Ω constitué d'une union de grands cercles pourrait être résolu en utilisant des techniques de reconstruction existantes. En effet, n'importe quel grand cercle de Ω constitue un ensemble *complet* de projections, complet dans le sens où il permet une reconstruction exacte et stable de f. Pour chaque grand cercle de Ω, une reconstruction de f pourrait tout d'abord être obtenue en utilisant les projections parallèles exponentielles correspondant à ce grand cercle dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" (section 2.4.3). La reconstruction de f à partir

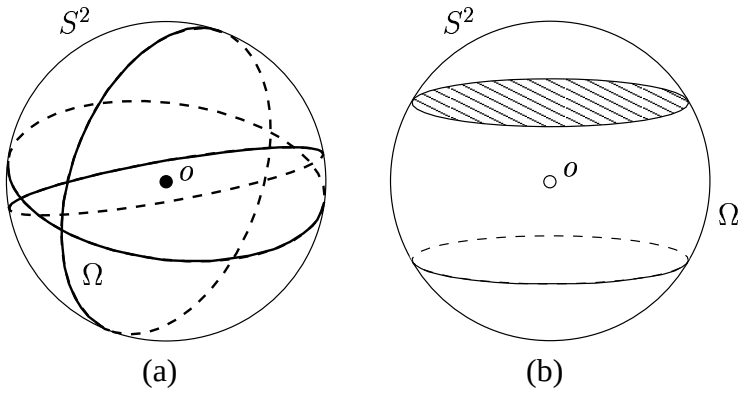


FIG. 4.1 – Exemples d'ensemble Ω constitué d'une union de grands cercles de S^2 : (a) Union finie de grands cercles. (b) Union infinie de grands cercles (bande équatoriale).

de toutes les projections de Ω serait finalement obtenue en moyennant les reconstructions correspondant aux différents grands cercles de Ω.

Néanmoins, cette approche est difficile à implémenter car, en pratique, la reconstruction de f par un ordinateur passe tout d'abord par un échantillonnage fini des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. Considérons par exemple l'ensemble Ω correspondant à la bande équatoriale de la figure 4.1b. Bien que peu habituelle, cette géométrie d'acquisition pourrait être implémentée sur un scanner SPECT existant sans nécessiter beaucoup de modifications au niveau matériel[1]. Un échantillonnage pratique de cet ensemble de directions consisterait à utiliser des coordonnées sphériques sur la sphère unitaire de telle sorte que les directions des projections soient uniformément échantillonnées sur Ω. Malheureusement, un tel échantillonnage nécessiterait une étape d'interpolation préliminaire pour obtenir des projections dont les directions sont uniformément réparties sur chaque grand cercle de Ω (figure 4.2). Ceci rend inefficace toute implémentation de cette approche du problème de reconstruction.

La méthode EXP-TTR que nous proposons pour ce type d'ensemble Ω est une technique "3D réelle" dans le sens où elle considère l'ensemble Ω comme une véritable géométrie d'acquisition 3D et non plus comme une union de grands cercles de S^2. Ceci a pour effet de remédier au problème d'échantillonnage cité plus haut. Cette méthode est du type rétroprojection (3D) des projections filtrées (FBP). La formule d'inversion correspondante constitue un apport théorique important dans la compréhension de la transformée rayons X exponentielle. Enfin, la méthode EXP-TTR généralise tous les résultats précédemment publiés [31, 78] sur l'inversion de cette transformée, ainsi que

[1]Il suffirait de pourvoir le détecteur d'un degré de liberté de mouvement supplémentaire en lui permettant de s'incliner par rapport à l'axe de rotation principal du scanner, ou, en d'autres termes, en lui donnant un angle polaire par rapport à l'axe de rotation du scanner. Plusieurs rotations complètes du détecteur autour du patient, chacune caractérisée par un angle polaire différent, seraient alors nécessaires pour acquérir des projections sur une bande équatoriale.

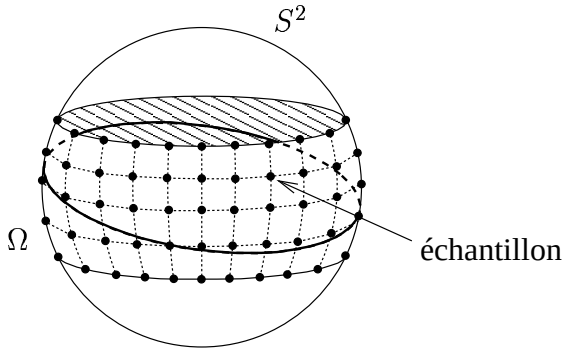


FIG. 4.2 – Échantillonnage pratique de la bande équatoriale. Sur cette figure est également représenté un des grands cercles de Ω. Très peu d'échantillons sont localisés exactement sur ce cercle.

la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle de Tretiak & Metz [69].

Avant de terminer cette section, nous désirons faire une remarque concernant la redondance présente dans les données correspondant aux ensembles Ω considérés dans ce chapitre. Dès que Ω contient plus d'un grand cercle de S^2, les données sont redondantes. D'un point de vue analytique, cette redondance est inutile car elle n'apporte aucune information supplémentaire quant à la reconstruction de f en absence de bruit dans les données. Par contre, d'un point de vue pratique, elle peut être bénéfique dans le sens où il est possible d'améliorer la qualité de la reconstruction. En utilisant toutes les projections disponibles sur Ω, il est possible de mieux gérer le bruit statistique –par une étape de moyennage par exemple– présent dans les données. Ceci constitue un avantage de la méthode EXP-TTR.

4.2 Algorithme EXP-TTR

Nous nous intéressons au problème de la reconstruction d'une fonction tridimensionnelle f à partir d'un jeu de projections parallèles exponentielles

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t}, \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{4.1}$$

connues pour tout vecteur $\underline{\theta} \in \Omega$. L'ensemble Ω de vecteurs unitaires (ou directions) considéré est constitué d'une union (finie ou infinie) de grands cercles de la sphère unitaire S^2. Nous noterons $\mathcal{C}(\underline{n})$ le grand cercle de la sphère unitaire orthogonal au vecteur unitaire $\underline{n}$:

$$\mathcal{C}(\underline{n}) = \left\{ \underline{\theta} \in S^2 \,:\, \underline{\theta}.\underline{n} = 0 \right\} \tag{4.2}$$

L'idée à la base de notre méthode est similaire à celle suivie par Ra et al. [64] en 1982 dans le développement de leur algorithme TTR (de l'anglais *True Three-dimensional Reconstruction*) pour l'inversion de la transformée rayons X ($\mu_0 = 0$)

pour le même type d'ensemble Ω. À partir de résultats sur l'inversion de la transformée de Radon, Ra et al. ont construit une méthode de reconstruction d'une fonction 3D f du type rétroprojection des projections filtrées. Sur la base de résultats sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante μ_0, nous avons développé une méthode similaire à l'algorithme TTR mais appliquée aux projections parallèles exponentielles, d'où l'appellation "méthode EXP-TTR".

Le raisonnement suivi lors du développement de la méthode EXP-TTR est le suivant. Il est tout d'abord important de remarquer qu'un grand cercle de la sphère unitaire constitue un ensemble complet de projections parallèles exponentielles à partir duquel une reconstruction exacte de f est possible. Lorsque Ω contient plus d'un grand cercle, les données $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sont par conséquent redondantes. En principe, la reconstruction de f à partir de l'ensemble Ω peut se faire en deux étapes :

1. employer la formule d'inversion "pseudo-3D" de la transformée rayons X exponentielle (avec atténuation constante) pour chaque grand cercle de Ω (section 2.4.3) et,
2. moyenner les différentes reconstructions obtenues à partir de chaque grand cercle.

La fusion de ces deux opérations en une formule de reconstruction dite "3D réelle" conduit à notre méthode EXP-TTR.

4.2.1 Formulation FBP

La méthode EXP-TTR est une méthode du type rétroprojection des projections filtrées (FBP) qui reconstruit la fonction tridimensionnelle f suivant la formule

$$f(\underline{x}) = \int_{\Omega} d\underline{\theta}\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}}\, g_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}) \tag{4.3}$$

où les projections filtrées $g_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sont obtenues par la convolution bidimensionnelle

$$g_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\underline{s}'.\underline{\theta}=0} d\underline{s}'\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} - \underline{s}')\, h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}') \tag{4.4}$$

Le filtre $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ est donné par

$$h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \begin{cases} 2c\, \dfrac{k_{\mu_0}(\|\underline{s}\|)}{\|\underline{s}\|}\, w\left(\underline{\theta} \times \dfrac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|}\right) & \text{si } \underline{\theta} \times \dfrac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.5}$$

où le symbole "$\times$" représente le produit vectoriel entre deux vecteurs et w est une fonction arbitraire définie sur S^2, positive et paire, c'est-à-dire vérifiant la relation $w(\underline{n}) = w(-\underline{n})$ pour tout $\underline{n} \in S^2$. Le sous-ensemble A de S^2 est l'ensemble de tous les vecteurs unitaires orthogonaux aux grands cercles qui composent Ω :

$$A = \left\{ \underline{n} \in S^2 \,:\, \mathcal{C}(\underline{n}) \subset \Omega \right\} \tag{4.6}$$

où le symbole "$\subset$" représente la relation d'inclusion. Il est à noter que l'ensemble A est toujours symétrique[2] car $\mathcal{C}(-\underline{n}) = \mathcal{C}(\underline{n})$. La constante c est donnée par

$$c = \frac{1}{\int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})} \tag{4.7}$$

Finalement, la fonction k_{μ_0} est le filtre utilisé dans la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante :

$$\begin{aligned} k_{\mu_0}(r) &= \int_{|\sigma|>\overline{\mu}_0} d\sigma\, \frac{|\sigma|}{2}\, e^{j2\pi r\sigma} \\ &= -\frac{\cos(\mu_0 r) + \mu_0 r\, \sin(\mu_0 r)}{4\pi^2 r^2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

La notation $\overline{\mu}_0 = \mu_0/2\pi$ est utilisée. La fonction k_{μ_0} est une fonction généralisée et doit être considérée dans le cadre de la théorie des distributions. Il en va donc de même pour la fonction $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$.

Démonstration. Pour dériver la formule (4.3), il est important de noter qu'une reconstruction exacte de f est possible à partir des projections parallèles exponentielles correspondant à n'importe quel grand cercle $\mathcal{C}(\underline{n})$ de Ω. Il suffit pour cela de considérer la fonction f comme un empilement de tranches orthogonales à $\underline{n}$ et d'appliquer la méthode FBP conventionnelle (2D) à chacune de ces tranches (section 2.4.3). Nous appelons $f(\underline{x}, \underline{n})$ la reconstruction exacte de f à partir des données exponentielles correspondant à $\mathcal{C}(\underline{n})$. Pour tout grand cercle $\mathcal{C}(\underline{n}) \subset \Omega$, la formule de reconstruction FBP de $f(\underline{x}, \underline{n})$ peut se mettre sous la forme

$$f(\underline{x}) \equiv f(\underline{x}, \underline{n}) = \int_{\mathcal{C}(\underline{n})} d\underline{\theta}\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}}\, p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}) \tag{4.9}$$

où les projections filtrées $p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sont décrites ci-après. La reconstruction de $f(\underline{x}, \underline{n})$ est obtenue à partir des projections parallèles exponentielles dont les directions $\underline{\theta} \in \mathcal{C}(\underline{n})$. En considérant le formalisme de la théorie des distributions, nous pouvons encore écrire

$$f(\underline{x}, \underline{n}) = \int_\Omega d\underline{\theta}\, \delta(\underline{\theta}.\underline{n})\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}}\, p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta}) \tag{4.10}$$

La distribution δ de Dirac permet de limiter la rétroprojection aux projections filtrées dont les directions $\underline{\theta}$ sont telles que $\underline{\theta}.\underline{n} = 0$, c'est-à-dire telles que $\underline{\theta} \in \mathcal{C}(\underline{n})$. Les équations (4.9) et (4.10) sont donc équivalentes.

Étudions à présent le filtrage des projections parallèles exponentielles pour un grand cercle $\mathcal{C}(\underline{n})$ donné. Selon la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon

[2] Un ensemble E de S^2 est *symétrique* si $\underline{n} \in E$ implique $-\underline{n} \in E$.

exponentielle avec atténuation constante μ_0, chaque ligne d'une projection, orthogonale au vecteur $\underline{n}$, doit être convoluée avec le filtre 1D k_{μ_0}. Géométriquement, nous pouvons donc considérer que ce filtre est appliqué de manière tangentielle au cercle $\mathcal{C}(\underline{n})$. Ainsi, nous introduisons deux vecteurs unitaires orthogonaux $\underline{a} = \underline{n} \times \underline{\theta}$, caractérisant la direction tangente à $\mathcal{C}(\underline{n})$ au point $\underline{\theta}$, et $\underline{b} = \underline{n}$. Ces deux vecteurs constituent une base orthonormée du plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. Tout vecteur $\underline{s}$ inclus dans ce plan peut donc s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$. La figure 4.3 illustre ces deux vecteurs.

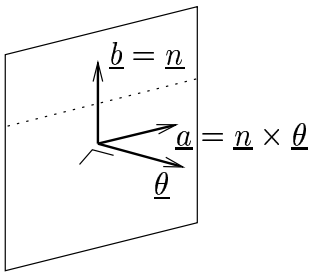


FIG. 4.3 – Plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. La ligne en pointillé indique la direction dans laquelle le filtre k_{μ_0} doit être appliqué.

En exprimant le vecteur $\underline{s}$ par $\underline{s} = u\,\underline{a} + v\,\underline{b}$, le filtrage de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ peut s'écrire

$$p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} = u\,\underline{a} + v\,\underline{b}) = \int_{\mathbb{R}} du'\, p_{\mu_0}\left(\underline{\theta}, (u-u')\,\underline{a} + v\,\underline{b}\right)\, k_{\mu_0}(u') \tag{4.11}$$

qui constitue une convolution 1D pour chaque ligne orthogonale à $\underline{n}$. Afin de faire apparaître une convolution 2D, nous utilisons à nouveau la distribution δ de Dirac. L'équation (4.11) est équivalente à

$$p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} = u\,\underline{a} + v\,\underline{b}) = \int_{\mathbb{R}} du' \int_{\mathbb{R}} dv'\, p_{\mu_0}\left(\underline{\theta}, (u-u')\,\underline{a} + (v-v')\,\underline{b}\right)\, k_{\mu_0}(u')\,\delta(v') \tag{4.12}$$

Nous terminons la mise en forme de l'équation (4.12) par le changement de variables $\underline{s}' = u'\,\underline{a} + v'\,\underline{b}$, qui conduit à

$$p^F_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\underline{s}'.\underline{\theta}=0} d\underline{s}'\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} - \underline{s}')\, k_{\mu_0}(\underline{s}'.\underline{a})\, \delta(\underline{s}'.\underline{n}) \tag{4.13}$$

Théoriquement, une formule de reconstruction du type (4.9) peut être écrite pour chaque vecteur $\underline{n} \in A$. L'étape suivante de notre preuve est de calculer la moyenne pondérée de toutes les reconstructions disponibles pour f. Nous écrivons

$$f(\underline{x}) = \frac{\displaystyle\int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})\, f(\underline{x}, \underline{n})}{\displaystyle\int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})} \tag{4.14}$$

où $w(\underline{n})$ est une fonction arbitraire définie sur S^2, positive et paire, c'est-à-dire telle que $w(\underline{n}) = w(-\underline{n})$. Cette fonction attribue à chaque reconstruction $f(\underline{x}, \underline{n})$ un certain poids tandis que le terme au dénominateur de (4.14) est un facteur de normalisation. En d'autres mots, cela signifie que l'on accorde plus d'importance à certains grands cercles en concordance directe avec la valeur donnée à $w(\underline{n})$. La formule (4.14) correspond à un ensemble Ω contenant un nombre infini de grands cercles de S^2, d'où le signe d'intégration en guise de sommation. Dans le cas d'un nombre fini de grands cercles, les intégrales apparaissant dans (4.14) doivent être remplacées par des sommes discrètes dont le nombre de termes est égal au nombre de grands cercles composant l'ensemble Ω.

La combinaison des équations (4.10), (4.13) et (4.14) fournit

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) \;\; = \;\; & c \int_A d\underline{n}\, w(\underline{n}) \int_\Omega d\underline{\theta}\, \delta(\underline{\theta}.\underline{n})\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}} \\ & \int_{\underline{s}'.\underline{\theta}=0} d\underline{s}'\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta} - \underline{s}')\, k_{\mu_0}(\underline{s}'.\underline{a})\, \delta(\underline{s}'.\underline{n}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où la constante c est donnée par l'équation (4.7). Cette dernière équation peut encore s'écrire sous la forme

$$f(\underline{x}) = \int_\Omega d\underline{\theta}\, e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}} \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta} - \underline{s})\, h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) \tag{4.16}$$

où

$$h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = c \int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})\, \delta(\underline{n}.\underline{s})\, \delta(\underline{n}.\underline{\theta})\, k_{\mu_0}(\underline{s}.\underline{a}), \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{4.17}$$

L'équation (4.16) est équivalente aux équations (4.3) et (4.4). Afin d'obtenir l'expression (4.5) de $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$, nous observons que $\underline{s} = (\underline{s}.\underline{a})\underline{a}$ dans (4.17) car $\underline{s}.\underline{\theta} = 0$, $\underline{s}.\underline{n} = 0$ et $(\underline{\theta}, \underline{n}, \underline{a})$ constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Vu que la fonction k_{μ_0} est paire, nous pouvons écrire

$$k_{\mu_0}(\underline{s}.\underline{a}) = k_{\mu_0}(|\underline{s}.\underline{a}|) = k_{\mu_0}(\|\underline{s}\|) \tag{4.18}$$

et donc

$$h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = c\, \frac{k_{\mu_0}(\|\underline{s}\|)}{\|\underline{s}\|} \int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})\, \delta\left(\underline{n}.\frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|}\right)\, \delta(\underline{n}.\underline{\theta}), \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{4.19}$$

qui se réduit à (4.5) car l'ensemble A est symétrique. ∎

L'observation de l'expression (4.5) du filtre $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ nous rappelle qu'il existe bel et bien de la redondance dans les données exponentielles dès que l'ensemble Ω contient plus qu'un grand cercle de la sphère unitaire. En effet, pour un ensemble Ω donné, il existe une infinité de filtres h_{μ_0} possibles. Ce degré de liberté s'exprime par la présence de la fonction de pondération $w(\underline{n})$ dans l'expression du filtre. Elle peut être choisie de façon arbitraire pour autant qu'elle soit définie sur S^2, positive et paire. Chaque choix particulier pour la fonction $w(\underline{n})$ conduit à une réalisation possible du filtre et donc de la formule de reconstruction.

4.2.2 Expression fréquentielle du filtre de convolution

Déterminer la transformée de Fourier du filtre de convolution $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ présente essentiellement deux intérêts. Tout d'abord, cette expression constitue un résultat original dont le graphe permettra de mieux comprendre le comportement fréquentiel du filtre. Ensuite, comme nous l'avons déjà mentionné, le filtre $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ est une fonction généralisée au sens de la théorie des distributions qui, de plus, présente une singularité en $\underline{s} = 0$. Lors de l'implémentation numérique de la méthode EXP-TTR, nous aurons besoin d'une version régularisée, ou encore à bande limitée, du filtre. Pour cela, nous utiliserons une fenêtre d'apodisation. Une telle méthode nécessite la connaissance de la transformée de Fourier du filtre h_{μ_0}.

La transformée de Fourier de $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sera notée $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = [\mathcal{F}_2 h_{\mu_0}](\underline{\theta}, \underline{\sigma})$. Pour $\underline{\theta}$ fixé, nous montrons ci-après qu'elle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) &= \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}}\, h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) \\ &= \frac{c}{2} \int_{\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) \cap A} d\underline{n}\, w(\underline{n})\ |\underline{\sigma}.(\underline{n} \times \underline{\theta})|\,, \qquad \underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta})$ est un sous-ensemble du grand cercle $\mathcal{C}(\underline{\theta})$:

$$\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) = \mathcal{C}(\underline{\theta}) \setminus \{\underline{n} \in \mathcal{C}(\underline{\theta})\ :\ |\underline{\sigma}.(\underline{n} \times \underline{\theta})| < \overline{\mu}_0\} \tag{4.21}$$

Une remarque importante que nous pouvons déjà faire à ce stade est que $\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) = \emptyset$ lorsque $\|\underline{\sigma}\| < \overline{\mu}_0$. En effet, nous avons alors $|\underline{\sigma}.(\underline{n} \times \underline{\theta})| < \overline{\mu}_0$ pour tout vecteur $\underline{n} \in \mathcal{C}(\underline{\theta})$. Dès lors,

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = 0 \quad \text{si } \|\underline{\sigma}\| < \overline{\mu}_0 \tag{4.22}$$

La transformée de Fourier du filtre est donc identiquement nulle à l'intérieur du domaine circulaire de rayon $\overline{\mu}_0$ centré à l'origine du plan fréquentiel. Cette propriété est valable quel que soit l'ensemble Ω considéré.

Démonstration. Pour déterminer l'expression (4.20), nous utilisons l'expression (4.17) du filtre $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ dans le domaine spatial. Pour tout vecteur $\underline{\sigma}$ tel que $\underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) &= c \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}} \int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})\, \delta(\underline{n}.\underline{s})\, \delta(\underline{n}.\underline{\theta})\, k_{\mu_0}(\underline{s}.\underline{a}) \\ &= c \int_A d\underline{n}\, w(\underline{n})\, \delta(\underline{n}.\underline{\theta}) \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}}\, \delta(\underline{n}.\underline{s})\, k_{\mu_0}(\underline{s}.\underline{a}) \\ &= c \int_{\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A} d\underline{n}\, w(\underline{n}) \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{-j2\pi \underline{s}.\underline{\sigma}}\, \delta(\underline{n}.\underline{s})\, k_{\mu_0}(\underline{s}.\underline{a}) \end{aligned} \tag{4.23}$$

où le facteur $\delta(\underline{n}.\underline{\theta})$ a permis de limiter le domaine d'intégration aux vecteurs $\underline{n}$ tels que $\underline{n}.\underline{\theta} = 0$, c'est-à-dire tels que $\underline{n} \in \mathcal{C}(\underline{\theta})$. Pour rappel, les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont définis

par $\underline{a} = \underline{n} \times \underline{\theta}$ et $\underline{b} = \underline{n}$. Si l'on pose $\underline{s} = u\,\underline{a} + v\,\underline{b}$, nous obtenons

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = c \int_{\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A} d\underline{n}\, w(\underline{n}) \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv\, e^{-j2\pi(u\underline{\sigma}.\underline{a} + v\underline{\sigma}.\underline{b})}\, \delta(v)\, k_{\mu_0}(u) \quad (4.24)$$

$$= c \int_{\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A} d\underline{n}\, w(\underline{n})\, [\mathcal{F}_1 k_{\mu_0}](\underline{\sigma}.\underline{a}) \quad (4.25)$$

D'après l'équation (4.8), l'expression de $\mathcal{F}_1 k_{\mu_0}$ est donnée par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_0}](R) = \begin{cases} |R|/2 & \text{si } |R| > \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$

En insérant cette dernière équation dans (4.25), nous obtenons l'expression (4.20) pour $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ car $\underline{a} = \underline{n} \times \underline{\theta}$. ■

4.3 Géométries particulières

Nous allons à présent appliquer la méthode EXP-TTR à deux géométries particulières. La première correspond à l'ensemble Ω s'identifiant à la sphère unitaire complète, c'est-à-dire $\Omega = S^2$ tandis que la seconde correspond à un ensemble Ω ayant la forme d'une bande équatoriale.

Le cas de la sphère complète a déjà été étudié par Hazou [31] et Weng et al. [78]. Ces travaux proposent tous deux un algorithme du type rétroprojection des projections filtrées, mais des approches différentes furent utilisées pour résoudre le problème de reconstruction. Weng et al. ont dérivé un filtre de convolution dans le domaine spatial tandis que Hazou a dérivé un filtre dans le domaine fréquentiel. Aucun lien ne fut établi entre ces deux méthodes. Nous montrons ci-après que le filtre fourni par la méthode EXP-TTR pour $w(\underline{n}) = 1$ et $\Omega = S^2$ est identique au filtre donné dans [78] lorsqu'il est exprimé dans le domaine spatial et à celui donné dans [31] lorsqu'il est exprimé dans le domaine fréquentiel. Les algorithmes FBP proposés dans [31] et [78] sont donc mathématiquement équivalents et peuvent être vus comme des cas particuliers de la méthode EXP-TTR.

Pour le cas de la bande équatoriale, aucune formule d'inversion de la transformée rayons X exponentielle n'a été proposée jusqu'à ce jour. La méthode EXP-TTR est donc originale dans le sens où elle fournit de nouveaux résultats sur l'inversion de cette transformée.

4.3.1 La sphère complète

Dans cette section, nous étudions le cas particulier où $\Omega = S^2$ et $w(\underline{n}) = 1$ pour tout vecteur $\underline{n}$. Par définition, l'ensemble A de tous les vecteurs unitaires orthogonaux à

des grands cercles de Ω s'identifie également à S^2, c'est-à-dire $A = S^2$. En effet, pour tout vecteur unitaire $\underline{n} \in S^2$, le grand cercle $\mathcal{C}(\underline{n}) \subset \Omega$. La constante c apparaissant dans l'expression du filtre de convolution est alors égale à

$$c = \frac{1}{\int_{S^2} d\underline{n}} = \frac{1}{4\pi} \tag{4.27}$$

vu que la surface de la sphère unitaire est égale à 4π. Dès lors, l'expression du filtre (4.5) dans le domaine spatial devient

$$\begin{aligned} h_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{k_{\mu_0}(\|\underline{s}\|)}{\|\underline{s}\|} \\ &= -\frac{\cos(\mu_0 \|\underline{s}\|) + \mu_0 \|\underline{s}\| \sin(\mu_0 \|\underline{s}\|)}{8\pi^3 \|\underline{s}\|^3} \end{aligned} \tag{4.28}$$

où nous avons remplacé k_{μ_0} par son expression (4.8). L'équation (4.28) correspond au filtre introduit par Weng et al. dans [78]. Tous les développements mathématiques menés par Weng et al. étaient purement formels. Le filtre (4.28) est en effet une fonction généralisée au sens de la théorie des distributions. Dans [78], l'expression exacte de la transformée de Fourier de (4.28) ne fut pas déterminée et une approximation de cette transformée fut utilisée dans l'implémentation numérique de la méthode. La méthode EXP-TTR permet de remédier à ce problème.

Comme démontré ci-après, la méthode EXP-TTR fournit le filtre de convolution dans le domaine fréquentiel dont l'expression est donnée par

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\|\underline{\sigma}\|^2 - \overline{\mu}_0^2} & \text{si } \|\sigma\| > \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.29}$$

Ce filtre est identique à celui fourni par Hazou dans [31]. Les développements mathématiques de la section précédente prouvent que (4.29) est la transformée de Fourier de (4.28) au sens de la théorie des distributions. Il est à noter que ce filtre est indépendant de $\underline{\theta}$ et est donc identique pour toutes les projections. Cela provient du choix $w(\underline{n}) = 1$, qui revient à pondérer chaque projection de la même façon.

Démonstration. Lorsque $\|\sigma\| < \overline{\mu}_0$, il a déjà été montré que $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = 0$ (voir équation (4.22)). Seul le cas $\|\underline{\sigma}\| > \overline{\mu}_0$ doit encore être considéré. Le point de départ de notre preuve est l'équation (4.20) avec $w(\underline{n}) = 1$ et $c = 1/4\pi$. Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et perpendiculaires à $\underline{\theta}$ tels que $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{\theta}$. En utilisant ces deux vecteurs, nous introduisons les angles ω et ψ pour écrire

$$\underline{n} = \cos\omega\, \underline{a} + \sin\omega\, \underline{b} \tag{4.30}$$

$$\underline{n} \times \underline{\theta} = \sin\omega\, \underline{a} - \cos\omega\, \underline{b} \tag{4.31}$$

$$\underline{\sigma} = \|\underline{\sigma}\| (\cos\psi\, \underline{a} + \sin\psi\, \underline{b}) \tag{4.32}$$

La figure 4.4 illustre ces nouvelles définitions. $(\|\underline{\sigma}\|, \psi)$ sont donc les coordonnées polaires du vecteur $\underline{\sigma}$ dans les axes $(\underline{a}, \underline{b})$. L'utilisation de ces expressions conduit à

$$\underline{\sigma}.(\underline{n} \times \underline{\theta}) = \|\underline{\sigma}\| \, \sin(\omega - \psi) \tag{4.33}$$

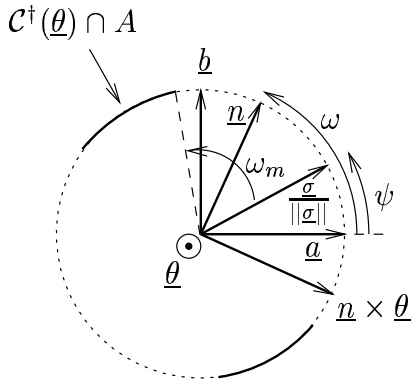


FIG. 4.4 – Définition des angles ω et ψ et illustration d'une valeur possible pour ω_m.

Soit l'angle $\omega_m \in [0, \pi/2[$ tel que

$$\sin \omega_m = \frac{\overline{\mu}_0}{\|\underline{\sigma}\|} \tag{4.34}$$

Vu que $A = S^2$, le domaine d'intégration en la variable $\underline{n}$ peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) \cap A &= \mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) \\ &= \{\underline{n} = \cos\omega \, \underline{a} + \sin\omega \, \underline{b} \; : \; |\sin(\omega - \psi)| > \sin\omega_m\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour tout vecteur $\underline{\sigma}$ tel que $\underline{\sigma}.\underline{\theta} = 0$ et $\|\underline{\sigma}\| > \overline{\mu}_0$, l'expression fréquentielle du filtre (4.20) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) &= \frac{\|\underline{\sigma}\|}{8\pi} \int_{|\sin(\omega-\psi)|>\sin\omega_m} d\omega \, |\sin(\omega - \psi)| \\ &= \frac{\|\underline{\sigma}\|}{8\pi} \int_{|\sin(\omega)|>\sin\omega_m} d\omega \, |\sin(\omega)| \\ &= \frac{\|\underline{\sigma}\|}{4\pi} \int_{\omega_m}^{\pi-\omega_m} d\omega \, \sin\omega \\ &= \frac{\|\underline{\sigma}\|}{2\pi} \cos\omega_m \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\|\underline{\sigma}\|^2 - \overline{\mu}_0^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

qui est bien l'expression fréquentielle (4.29) du filtre de convolution. ■

La figure 4.5 illustre le filtre $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ pour le cas de la sphère complète. Sur cette figure, nous avons utilisé les coordonnées cartésiennes U et V du vecteur $\underline{\sigma}$ dans les axes $(\underline{a}, \underline{b})$. Nous avons donc $\underline{\sigma} = U\,\underline{a} + V\,\underline{b}$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \|\underline{\sigma}\| \cos\psi \\ V = \|\underline{\sigma}\| \sin\psi \end{array} \right. \tag{4.37}$$

De plus, le plan de fréquences (U, V) a été normalisé en prenant une valeur de $\overline{\mu}_0$ égale à l'unité. La zone du filtre qui nous intéresse est la région proche de l'origine du plan de fréquences. En effet, pour $\|\underline{\sigma}\| \gg \overline{\mu}_0$, le filtre fourni par la méthode EXP-TTR est quasiment identique au filtre fourni par la méthode TTR ($\mu_0 = 0$) :

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\|\underline{\sigma}\|^2 - \overline{\mu}_0^2} \simeq \frac{1}{2\pi}\,\|\underline{\sigma}\| = \mathcal{H}_0(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) \tag{4.38}$$

Il est à noter que, dans le cas de la sphère complète, le filtre est purement radial, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la norme du vecteur $\underline{\sigma}$.

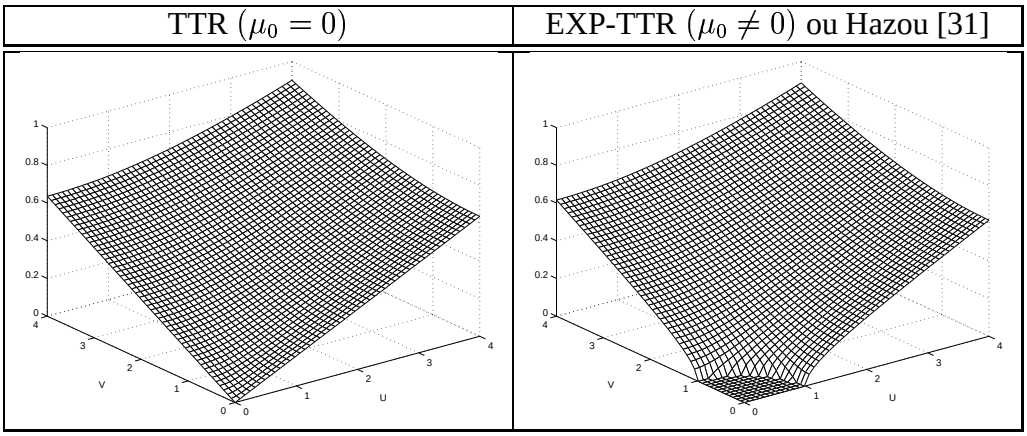


FIG. 4.5 – Domaine fréquentiel du filtre TTR et EXP-TTR pour le cas de la sphère complète. Le plan de fréquences (U, V) a été normalisé, c'est-à-dire $\overline{\mu}_0 = 1$.

4.3.2 La bande équatoriale

Nous étudions ici un ensemble Ω pour lequel aucune formule d'inversion de la transformée rayons X exponentielle n'a encore été proposée. Cet ensemble correspond à une bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$ et peut être généré entièrement par une union infinie de grands cercles de la sphère unitaire. Nous écrivons

$$\Omega = \left\{ \underline{\theta} \in S^2 \;:\; |\underline{\theta}.\underline{e}_z| \leq \sin\theta_0 \right\} \tag{4.39}$$

où $\underline{e}_z$ est un vecteur unitaire parallèle à l'axe de symétrie de la bande équatoriale (voir figure 4.6). À cet ensemble Ω correspond l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ \underline{n} \in S^2 \;:\; |\underline{n}.\underline{e}_z| \geq \cos\theta_0 \right\} \tag{4.40}$$

également représenté sur la figure 4.6. Les équations (4.5) et (4.40) spécifient complètement le filtre de convolution dans le domaine spatial, avec un degré de liberté contrôlé par la fonction de pondération $w(\underline{n})$.

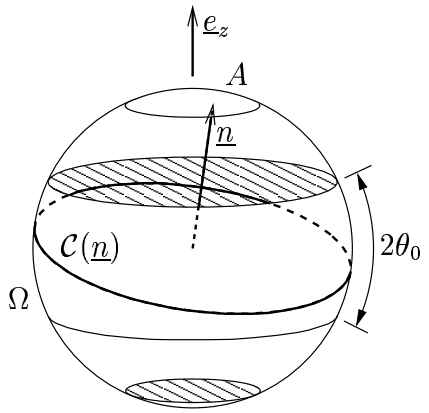


FIG. 4.6 – Bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$. En trait plus épais, on observe un des grands cercles $\mathcal{C}(\underline{n})$ composant Ω.

Pour l'étude du filtre dans le domaine fréquentiel, nous choisissons la réalisation de $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ correspondant à $w(\underline{n}) = 1$. Comme démontré ci-après, son expression est donnée par

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \begin{cases} \dfrac{\|\underline{\sigma}\|}{4\pi(1-\cos\theta_0)}\, G(\psi, \omega_m, \omega_s) & \text{si } \|\underline{\sigma}\| > \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.41}$$

où les angles ψ et ω_m sont définis comme à la section précédente (voir équations (4.32) et (4.34)). L'angle ω_s est défini par

$$\cos\omega_s = \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta} \tag{4.42}$$

où θ est l'angle polaire du vecteur $\underline{\theta}$ mesuré par rapport à $\underline{e}_z$. La fonction $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ est donnée à la table 4.1 et présente la propriété de symétrie suivante : $G(\psi, \omega_m, \omega_s) = G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi + \pi, \omega_m, \omega_s)$. Sa connaissance pour $\psi \in [0, \pi/2]$ suffit.

Démonstration. Il a déjà été démontré que $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = 0$ lorsque $\|\underline{\sigma}\| < \overline{\mu}_0$ (voir équation (4.22)). Nous n'envisageons donc plus que le cas $\|\underline{\sigma}\| \geq \overline{\mu}_0$. Le choix $w(\underline{n}) = 1$ conduit à la valeur de la constante c suivante

$$c = \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega d\underline{n}} = \frac{1}{4\pi(1-\cos\theta_0)} \tag{4.43}$$

$G(\psi, \omega_m, \omega_s)$		$\omega_s < \omega_m$	$\omega_m \geq \omega_s$
$\psi < \frac{\pi}{2} - \omega_s - \omega_m$	$\omega_s < \frac{\pi}{2} + \psi - \omega_m$	$2 \sin\omega_s \cos\psi$	
	$\omega_s \geq \frac{\pi}{2} + \psi - \omega_m$	$\cos\omega_m + \sin(\omega_s + \psi)$	
$\frac{\pi}{2} - \omega_s - \omega_m \leq \psi$ et $\psi < \frac{\pi}{2} - \lvert\omega_s - \omega_m\rvert$	$\omega_s < \frac{\pi}{2} + \psi - \omega_m$	$\cos\omega_m + \sin(\omega_s - \psi)$	
	$\omega_s \geq \frac{\pi}{2} + \psi - \omega_m$	$2 \cos\omega_m$	
$\frac{\pi}{2} - \lvert\omega_s - \omega_m\rvert \leq \psi < \frac{\pi}{2}$		$2 \cos\omega_m -$ $2 \sin\psi \cos\omega_s$	0

TAB. 4.1 – Définition de la fonction $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$. Cette table est valable uniquement pour $0 \leq \psi \leq \pi/2$ et $\|\underline{\sigma}\| > \overline{\mu}_0$.

car la surface de la bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$ est égale à $4\pi(1 - \cos\theta_0)$. Comme à la section précédente, nous introduisons deux vecteurs unitaires orthogonaux $\underline{a}$ et $\underline{b}$ tels que $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{\theta}$ et les angles ω et ψ tels que

$$\underline{n} = \cos\omega\, \underline{a} + \sin\omega\, \underline{b} \tag{4.44}$$

$$\underline{n} \times \underline{\theta} = \sin\omega\, \underline{a} - \cos\omega\, \underline{b} \tag{4.45}$$

$$\underline{\sigma} = \|\underline{\sigma}\| \, (\cos\psi\, \underline{a} + \sin\psi\, \underline{b}) \tag{4.46}$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire

$$\underline{\sigma}.(\underline{n} \times \underline{\theta}) = \|\underline{\sigma}\| \, \sin(\omega - \psi) \tag{4.47}$$

et

$$\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) = \{\underline{n} = \cos\omega\, \underline{a} + \sin\omega\, \underline{b} \, : \, |\sin(\omega - \psi)| > \sin\omega_m\} \tag{4.48}$$

où nous avons à nouveau défini l'angle $\omega_m \in [0, \pi/2[$ par

$$\sin\omega_m = \frac{\overline{\mu}_0}{\|\underline{\sigma}\|} \tag{4.49}$$

Afin d'adapter l'expression (4.20) du filtre au cas de la bande équatoriale, notons que

$$\mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) \cap A = \mathcal{C}^\dagger(\underline{\theta}) \cap (\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A) \tag{4.50}$$

La figure 4.7 illustre l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A$. Cette région est composée de deux arcs d'ouverture angulaire $2\omega_s$ diamétralement opposés. Il est pratique de choisir les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ selon les axes de symétrie de l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A$ comme montré à la figure 4.7b. Le vecteur $\underline{a}$ est par conséquent inclus dans le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\underline{e}_z$. Nous définissons alors l'angle ω_s par

$$\cos\omega_s = \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta} \tag{4.51}$$

où θ est l'angle polaire du vecteur $\underline{\theta}$ mesuré par rapport à la direction $\underline{e}_z$ (voir figure 4.7c). Étant données ces nouvelles définitions, nous pouvons écrire

$$\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A = \{\underline{n} = \cos\omega\, \underline{a} + \sin\omega\, \underline{b} \, : \, |\sin\omega| > \cos\omega_s\} \tag{4.52}$$

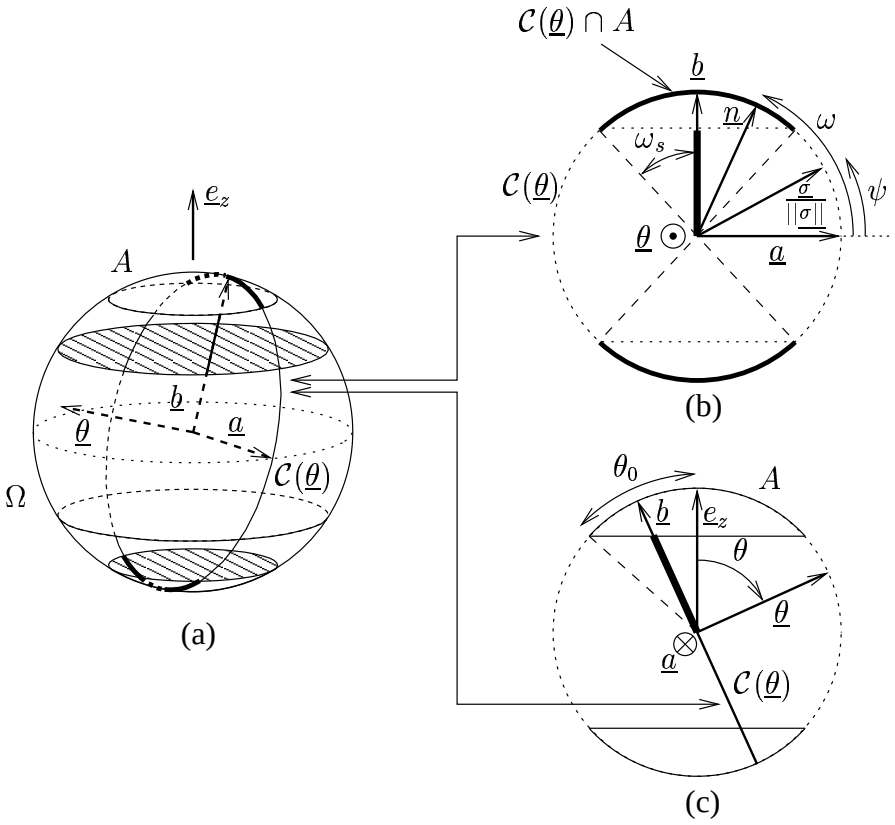


FIG. 4.7 – Illustration de l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{\theta}) \cap A$. (a) Vue en perspective. (b) Vue dans le plan du grand cercle $\mathcal{C}(\underline{\theta})$. (c) Vue de profil du grand cercle $\mathcal{C}(\underline{\theta})$.

Dès lors, l'utilisation des équations (4.43), (4.47), (4.48) et (4.52) dans l'expression (4.20) fournit

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \frac{\|\underline{\sigma}\|}{8\pi(1-\cos\theta_0)} \int_W d\omega \ |\sin(\omega - \psi)| \tag{4.53}$$

où l'ensemble d'intégration W est donné par

$$W = \left\{ \omega \in [0, 2\pi[: \begin{array}{c} |\sin(\omega-\psi)| \geq \sin\omega_m \\ |\sin\omega| > \cos\omega_s \end{array} \right\} \tag{4.54}$$

L'expression du filtre peut encore s'écrire

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = \frac{\|\underline{\sigma}\|}{4\pi(1-\cos\theta_0)} G(\psi, \omega_m, \omega_s) \tag{4.55}$$

où nous avons défini la fonction $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ par

$$G(\psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_W d\omega \ |\sin(\omega - \psi)| \tag{4.56}$$

A l'annexe B.2, nous montrons que la fonction $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ n'a besoin d'être connue que pour $\psi \in [0, \pi/2]$. En effet, les relations suivantes

$$G(\psi, \omega_m, \omega_s) = G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi + \pi, \omega_m, \omega_s) \tag{4.57}$$

sont toujours vérifiées. Le calcul de l'intégrale (4.56) définissant G est mené à l'annexe B.2 et fournit les résultats de la table 4.1. ■

Deux remarques importantes peuvent être faites à propos de la forme du filtre $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ dans le cas de la bande équatoriale. Tout d'abord, de par son expression, il ne dépend que de l'angle polaire θ du vecteur $\underline{\theta}$. Toutes les projections parallèles exponentielles dont la direction $\underline{\theta}$ présente le même angle avec le vecteur $\underline{e}_z$ sont donc convoluées par le même filtre. Ensuite, vu la relation (4.57), le filtre $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ est symétrique par rapport aux directions $\underline{a}$ et $\underline{b}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, U\,\underline{a} + V\,\underline{b}) = \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, -U\,\underline{a} + V\,\underline{b}) = \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, U\,\underline{a} - V\,\underline{b}) = \mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, -U\,\underline{a} - V\,\underline{b}) \tag{4.58}$$

où U et V sont les coordonnées cartésiennes du vecteur $\underline{\sigma}$ dans les axes $(\underline{a}, \underline{b})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \|\underline{\sigma}\| \cos\psi \\ V = \|\underline{\sigma}\| \sin\psi \end{array} \right. \tag{4.59}$$

Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 fournissent le graphe de la fonction $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, U\,\underline{a} + V\,\underline{b})$ pour $\theta_0 = 10°$, $\theta_0 = 40°$ et $\theta_0 = 70°$ respectivement. À nouveau, le plan de fréquences (U, V) a été normalisé en choisissant $\overline{\mu}_0 = 1$. De plus, vu que le filtre est symétrique,

seul le premier quadrant du plan fréquentiel ($U > 0$ et $V > 0$) a été traité.

L'observation de ces trois figures nous apprend que, quelle que soit l'ouverture angulaire de la bande équatoriale, la valeur du filtre (pour n'importe quelle valeur du couple (U, V)) est d'autant plus faible que la direction $\underline{\theta}$ s'approche de la frontière de l'ensemble Ω. Le calcul montre d'ailleurs que le filtre est identiquement nul pour $\theta = \pi/2 \pm \theta_0$, c'est-à-dire sur la frontière même. Ensuite, dans le cas du filtre EXP-TTR, notons l'existence d'une zone du plan fréquentiel (hormis la zone délimitée par le cercle de rayon $\overline{\mu}_0$) où le filtre est identiquement nul. On voit en effet apparaître une bande rappelant le comportement du filtre k_{μ_0} utilisé pour inverser la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante.

4.4 Vérification de la méthode

Nous proposons ici de montrer que la méthode EXP-TTR fournit des images de bonne qualité. La formule de reconstruction (4.3) a été testée sur des données simulées à partir d'un fantôme 3D simplifié du cœur composé de trois ellipsoïdes. Une description complète de ce fantôme est donnée à l'annexe C.1. Il doit être clair que cette section porte exclusivement sur la vérification de la méthode d'inversion. Les données de simulation correspondent à un jeu de projections parallèles exponentielles idéales, c'est-à-dire calculées de manière analytique sur base des définitions des ellipsoïdes constituant le fantôme.

Dans cette étude, nous nous limitons à l'étude de la bande équatoriale pour trois ouvertures angulaires différentes correspondant à $\theta_0 = 90°$ (sphère complète), $60°$, $30°$. Pour chacune de ces trois géométries, nous montrons des résultats correspondant à l'utilisation de la méthode EXP-TTR aux cas $\mu_0 = 0$ et $\mu_0 \neq 0$.

4.4.1 Détails d'implémentation

La reconstruction d'une fonction tridimensionnelle f à partir de la formule (4.3) peut être implémentée de la manière suivante :

• **Étape 1.** Filtrer chaque projection parallèle exponentielle $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ conformément aux formules (4.4) et (4.5).
• **Étape 2.** Rétroprojeter les projections filtrées $g_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ selon la formule (4.3).

Avant de passer en revue l'implémentation des différentes étapes intervenant dans le processus de reconstruction, nous montrons comment nous avons paramétré les projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ dans le système d'axes de référence $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

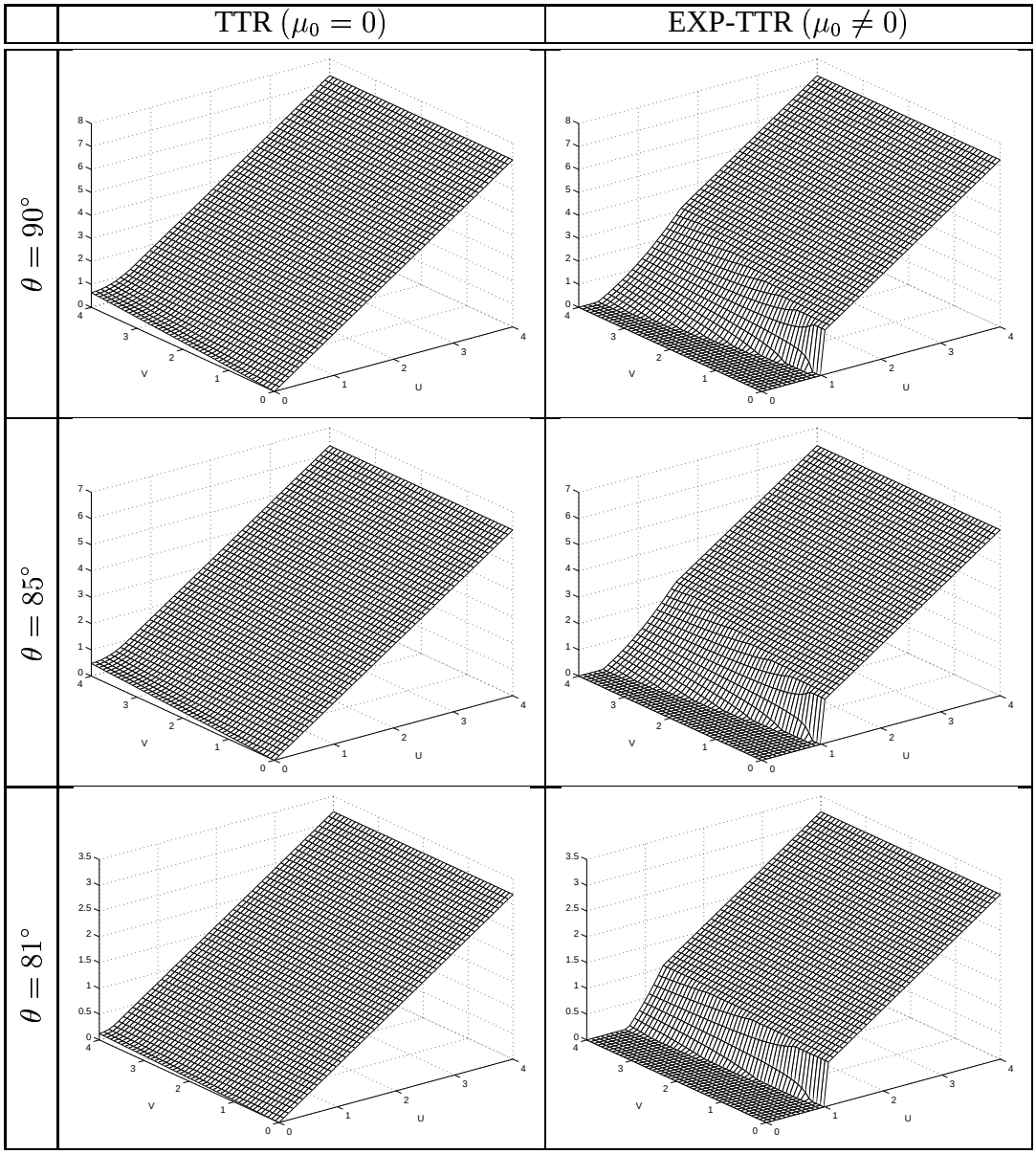


FIG. 4.8 – Domaine fréquentiel du filtre TTR et EXP-TTR pour la bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$ où $\theta_0 = 10°$. Le plan fréquentiel (U, V) a été normalisé ($\overline{\mu}_0 = 1$).

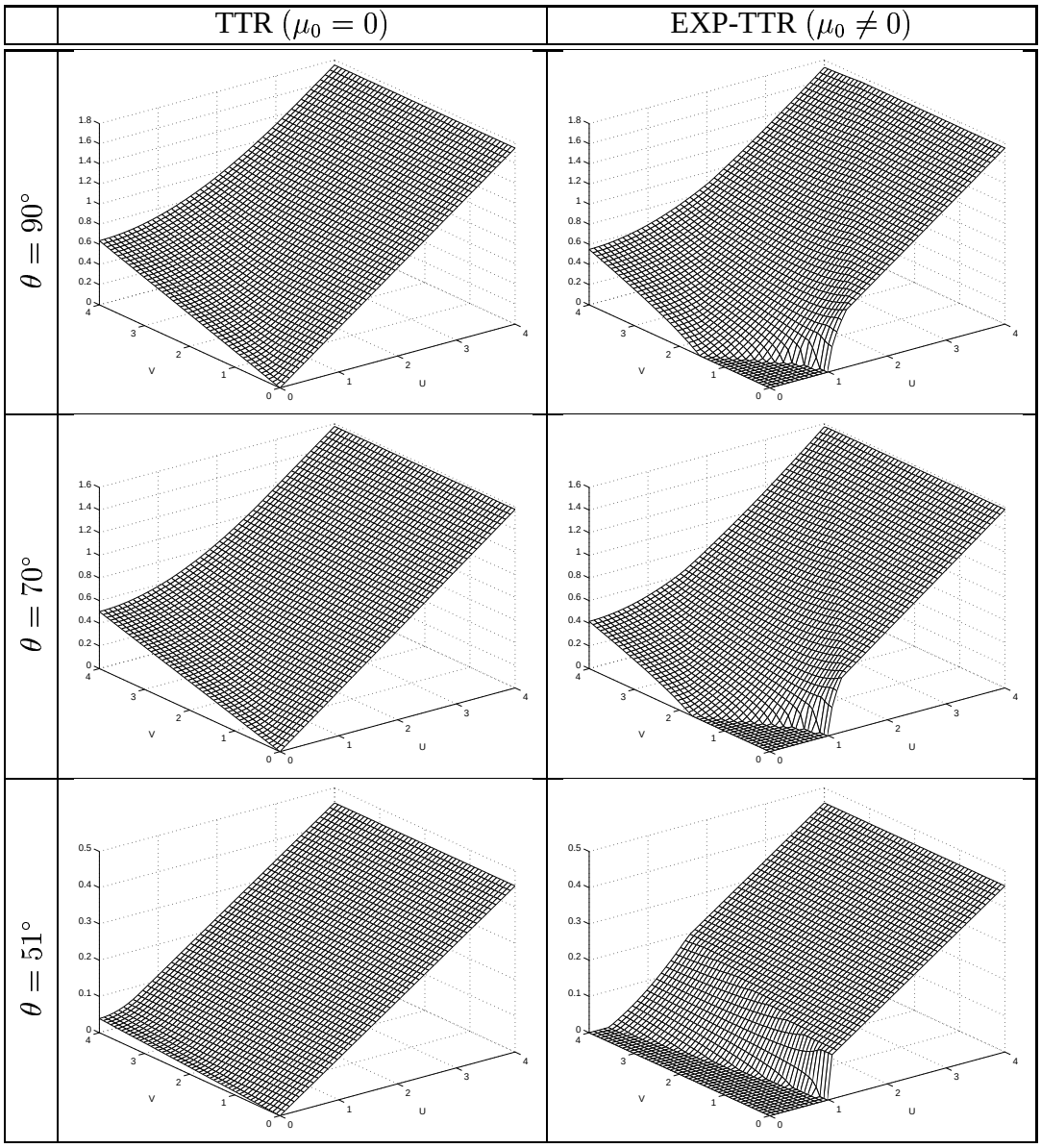


FIG. 4.9 – Domaine fréquentiel du filtre filtre TTR et EXP-TTR pour la bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$ où $\theta_0 = 40°$. Le plan fréquentiel (U, V) a été normalisé ($\overline{\mu}_0 = 1$).

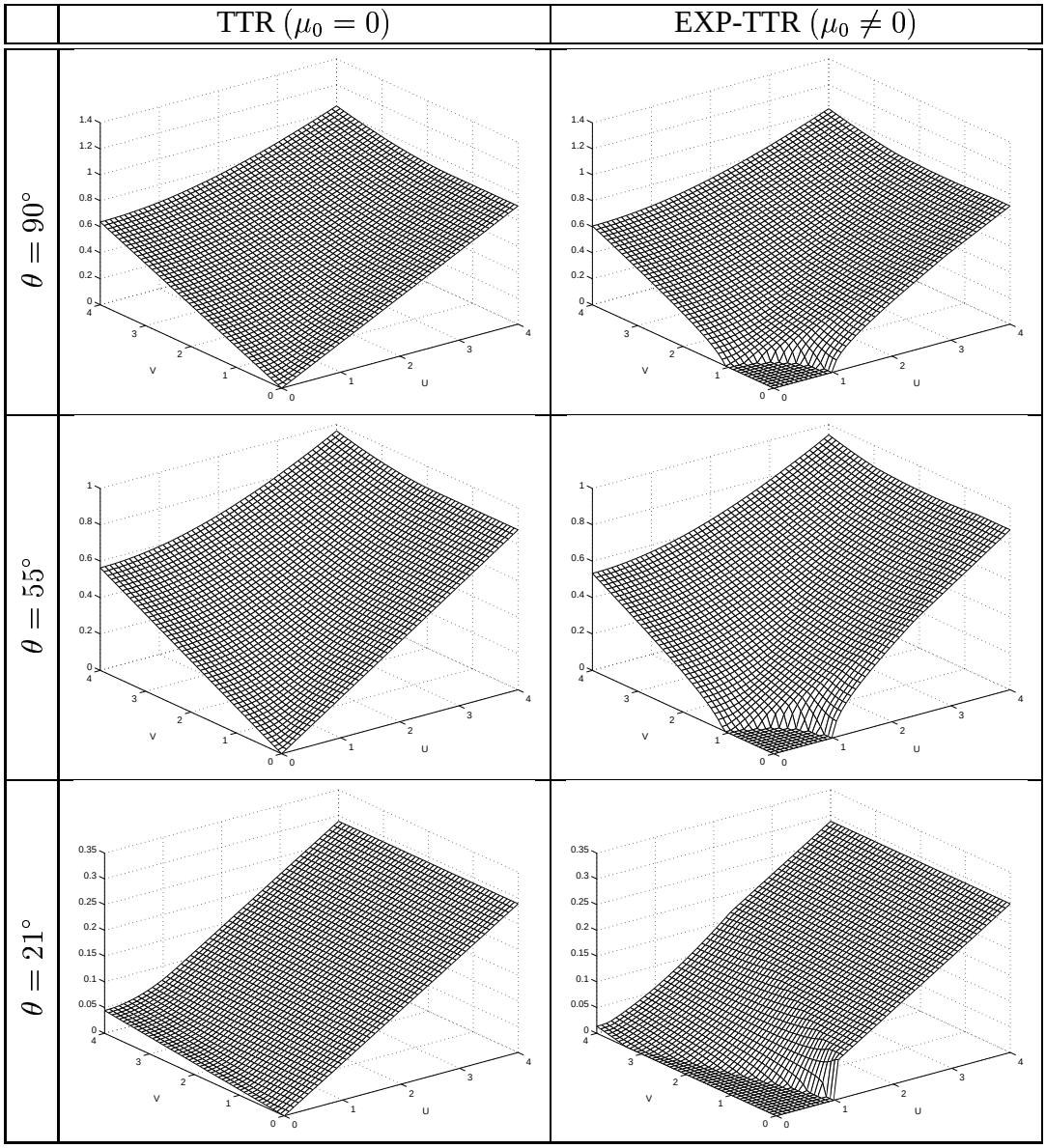


FIG. 4.10 – Domaine fréquentiel du filtre TTR et EXP-TTR pour la bande équatoriale d'ouverture angulaire $2\theta_0$ où $\theta_0 = 70°$. Le plan de fréquence (U, V) a été normalisé ($\overline{\mu}_0 = 1$).

Dans le plan $\Pi_{\underline{\theta}}$ de chaque projection, nous introduisons deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\underline{a}$ et $\underline{b}$. De plus, nous utilisons les coordonnées sphériques (φ, θ) pour écrire

$$\underline{\theta} = (\sin\theta\,\cos\varphi, \sin\theta\,\sin\varphi, \cos\theta) \tag{4.60}$$

$$\underline{a} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{4.61}$$

$$\underline{b} = (-\cos\theta\,\cos\varphi, -\cos\theta\,\sin\varphi, \sin\theta) \tag{4.62}$$

où $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\theta \in [\pi/2 - \theta_0, \pi/2 + \theta_0]$ et θ_0 est la demi-ouverture angulaire de la bande équatoriale. Le vecteur $\underline{a}$ est donc choisi dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. La figure 4.11 illustre l'utilisation des coordonnées sphériques. Les projections parallèles exponentielles peuvent alors s'écrire sous la forme

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} = u\underline{a} + v\underline{b}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(u\underline{a} + v\underline{b} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{4.63}$$

Pour rappel, quel que soit θ_0, l'axe de symétrie de la bande équatoriale est orienté selon le vecteur $\underline{e}_z$.

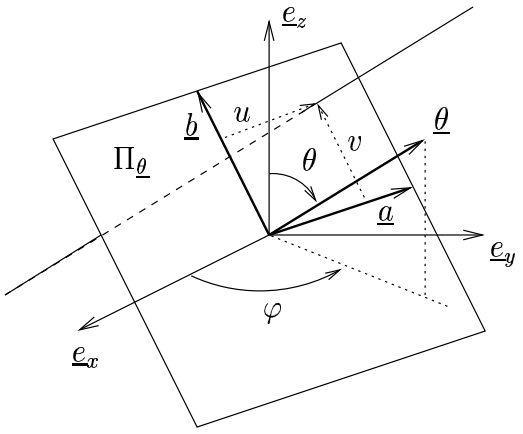


FIG. 4.11 – Illustration des coordonnées sphériques utilisées pour paramétrer les projections parallèles exponentielles. La droite apparaissant sur la figure, d'équation $\underline{x} = u\underline{a} + v\underline{b} + t\underline{\theta}$, représente une des droites sur lesquelles la fonction f est intégrée.

Implémentation de l'étape 1

La première étape consiste à réaliser une convolution bidimensionnelle de chaque projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, u\underline{a} + v\underline{b})$ avec le filtre adéquat $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, u\underline{a} + v\underline{b})$. Remarquons que les développements théoriques ont montré que, quel que soit θ_0, l'expression h_{μ_0} du filtre est indépendante de la variable φ. Supposons à présent que les projections soient connues sur une grille de $N_u \times N_v$ points telle que

$$(u_k, v_l) = (u_0 + k\Delta u, v_0 + l\Delta v), \quad k = 0, \ldots, (N_u - 1) \text{ et } l = 0, \ldots, (N_v - 1) \tag{4.64}$$

où Δu (respectivement Δv) est le pas d'échantillonnage de chaque projection dans la direction $\underline{a}$ (respectivement $\underline{b}$) et où u_0 et v_0 sont choisis de telle sorte que la grille soit centrée à l'origine du plan (u, v). Nous discrétisons alors la convolution (4.4) suivant la formule

$$g_{\mu_0}(\underline{\theta}, u_k\underline{a} + v_l\underline{b})$$
$$\simeq \Delta u\,\Delta v \sum_{k'=0}^{N_u-1}\sum_{l'=0}^{N_v-1} p_{\mu_0}(\underline{\theta}, u_{k'}\underline{a} + v_{l'}\underline{b}) h^r_{\mu_0}\left(\underline{\theta}, (u_k - u_{k'})\underline{a} + (v_l - v_{l'})\underline{b}\right) \quad (4.65)$$

pour $k = 0, \ldots, (N_u - 1)$ et $l = 0, \ldots, (N_v - 1)$. Dans cette dernière équation, la fonction $h^r_{\mu_0}$ est une version à bande limitée du filtre h_{μ_0}. Faisant l'hypothèse que $\Delta u = \Delta v$, nous utilisons la version régularisée suivante

$$h^r_{\mu_0}(\underline{\theta}, u\underline{a}+v\underline{b}) = \int_{\sqrt{U^2+V^2}\leq 1/(2\Delta u)} dU\,dV\,\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, U\underline{a}+V\underline{b}) \frac{1 + \cos\left(2\pi\Delta u\sqrt{U^2+V^2}\right)}{2} \quad (4.66)$$

où, pour rappel, $\mathcal{H}_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) = [\mathcal{F}_2 h_{\mu_0}](\underline{\theta}, \underline{\sigma})$, et où nous avons opté pour une fenêtre d'apodisation de Hanning $(1 + \cos \pi t)/2$ de forme circulaire dans le plan fréquentiel (U, V). Notons que, pour le calcul numérique des échantillons de $h_{\mu_0}(\underline{\theta}, u\underline{a}+v\underline{b})$, nous avons utilisé la méthode de Stearns et al. [68]. La convolution discrète (4.65) est alors calculée par un algorithme de transformée de Fourier 2D rapide. Dès lors, si $N_u = N_v$, le nombre d'opérations nécessaires par projection est proportionnel à $N_u^2 \log N_u$.

Implémentation de l'étape 2

Cette étape de la reconstruction est relativement commune en tomographie. Nous avons échantillonné la bande équatoriale, ensemble des directions $\underline{\theta}$ pour lesquelles les projections parallèles exponentielles sont connues, en utilisant les coordonnées sphériques de la manière suivante

$$\varphi_k = k\,\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = 2\pi/N_\varphi, \quad k = 0, \ldots, (N_\varphi - 1) \quad (4.67)$$

$$\theta_l = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + \frac{\Delta\theta}{2} + l\,\Delta\theta, \quad \Delta\theta = 2\theta_0/N_\theta, \quad l = 0, \ldots, (N_\theta - 1) \quad (4.68)$$

où $\Delta\varphi$ et $\Delta\theta$ sont les pas d'échantillonnage en φ et θ respectivement et, où N_φ et N_θ sont les nombres d'échantillons en φ et θ respectivement. Cela conduit aux notations suivantes

$$\underline{\theta}_{kl} = (\sin\theta_l\ \cos\varphi_k, \sin\theta_l\ \sin\varphi_k, \cos\theta_l) \quad (4.69)$$

$$\underline{a}_{kl} = (-\sin\varphi_k, \cos\varphi_k, 0) \quad \text{pour tout } l = 0, \ldots, (N_\theta - 1) \quad (4.70)$$

$$\underline{b}_{kl} = (-\cos\theta_l\ \cos\varphi_k, -\cos\theta_l\ \sin\varphi_k, \sin\theta_l) \quad (4.71)$$

La reconstruction de la fonction tridimensionnelle f en un point $\underline{x}$ s'obtient en utilisant la formule (4.3) que nous avons discrétisée de la manière suivante

$$f(\underline{x}) \simeq \Delta\varphi\,\Delta\theta \sum_{k=0}^{N_\varphi-1}\sum_{l=0}^{N_\theta-1} e^{-\mu_0 \underline{x}.\underline{\theta}_{kl}}\, g_{\mu_0}\left(\underline{\theta}_{kl}, (\underline{x}.\underline{a}_{kl})\underline{a}_{kl} + (\underline{x}.\underline{b}_{kl})\underline{b}_{kl}\right) \sin\theta_l \quad (4.72)$$

où $\sin\theta_l$ est le jacobien des coordonnées sphériques. Si l'image f est reconstruite sur une grille de $N_x \times N_y \times N_z$ voxels, le nombre d'opérations nécessaires pour réaliser l'étape 2 est proportionnel à $N_x N_y N_z N_\varphi N_\theta$.

Étant données $N_\varphi \times N_\theta$ projections, l'étape 1 (filtrage des projections) comporte un nombre d'opérations proportionnel à $N_\varphi N_\theta N_u^2 \log N_u$. Dès lors, si $N_u = N_v \simeq N_x = N_y = N_z \simeq N_\varphi \simeq N_\theta = M$, le nombre d'opérations pour reconstruire l'image f par la méthode EXP-TTR est de l'ordre de M^5.

4.4.2 Reconstructions

Pour nos simulations, l'image f est discrétisée sur une grille cubique, centrée à l'origine du référentiel $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, composée de $N_x \times N_y \times N_z$ voxels cubiques de dimensions $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, où $N_x = N_y = N_z = 100$ et $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.5$mm. Nous considérons donc un volume de reconstruction cubique de dimensions $150\text{mm} \times 150\text{mm} \times 150\text{mm}$.

Pour tester la méthode EXP-TTR, nous avons simulé des projections parallèles exponentielles présentant un coefficient d'atténuation constant égal à $\mu_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$. Quelle que soit la géométrie étudiée (c'est-à-dire la valeur de θ_0), les projections ont été échantillonnées sur une grille carrée, centrée à l'origine du plan (u, v), composée de $N_u \times N_v$ pixels carrés de dimensions $\Delta u \times \Delta v$, avec $N_u = N_v = 100$ et $\Delta u = \Delta v = 1.5$mm. Les directions $\underline{\theta}$ des projections sont échantillonnées uniformément sur la bande équatoriale avec un pas angulaire de 3° aussi bien selon φ que θ. La table 4.2 donne les nombres d'échantillons utilisés pour chacune des trois valeurs de θ_0 considérées.

θ_0	N_φ	N_θ
90°	120	60
60°	120	40
30°	120	20

TAB. 4.2 – Nombre d'échantillons en φ et θ utilisés pour tester la méthode EXP-TTR.

Les figures 4.12, 4.13 et 4.14 montrent les résultats de reconstruction de la méthode EXP-TTR pour $\theta_0 = 90^\circ, 60^\circ$ et 30° respectivement, pour $\mu_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$. La qualité de ces reconstructions montre bien l'exactitude de notre algorithme.

4.4.3 Fonctions de transfert

Nous étudions à présent le comportement fréquentiel de notre algorithme en présentant les fonctions de transfert locales correspondant aux trois directions principales

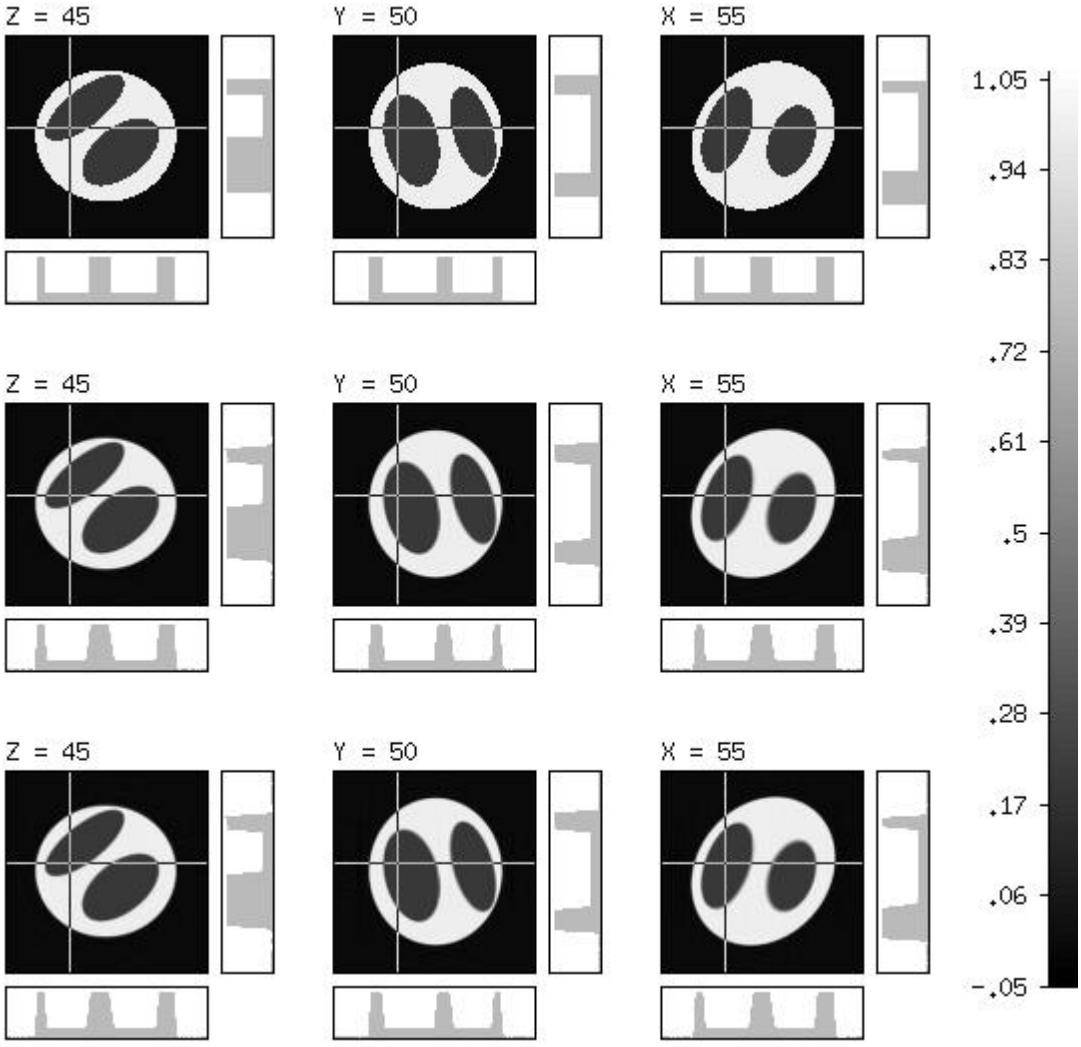


FIG. 4.12 – Résultats de reconstruction pour $\theta_0 = 90°$. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0$. 3ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$.

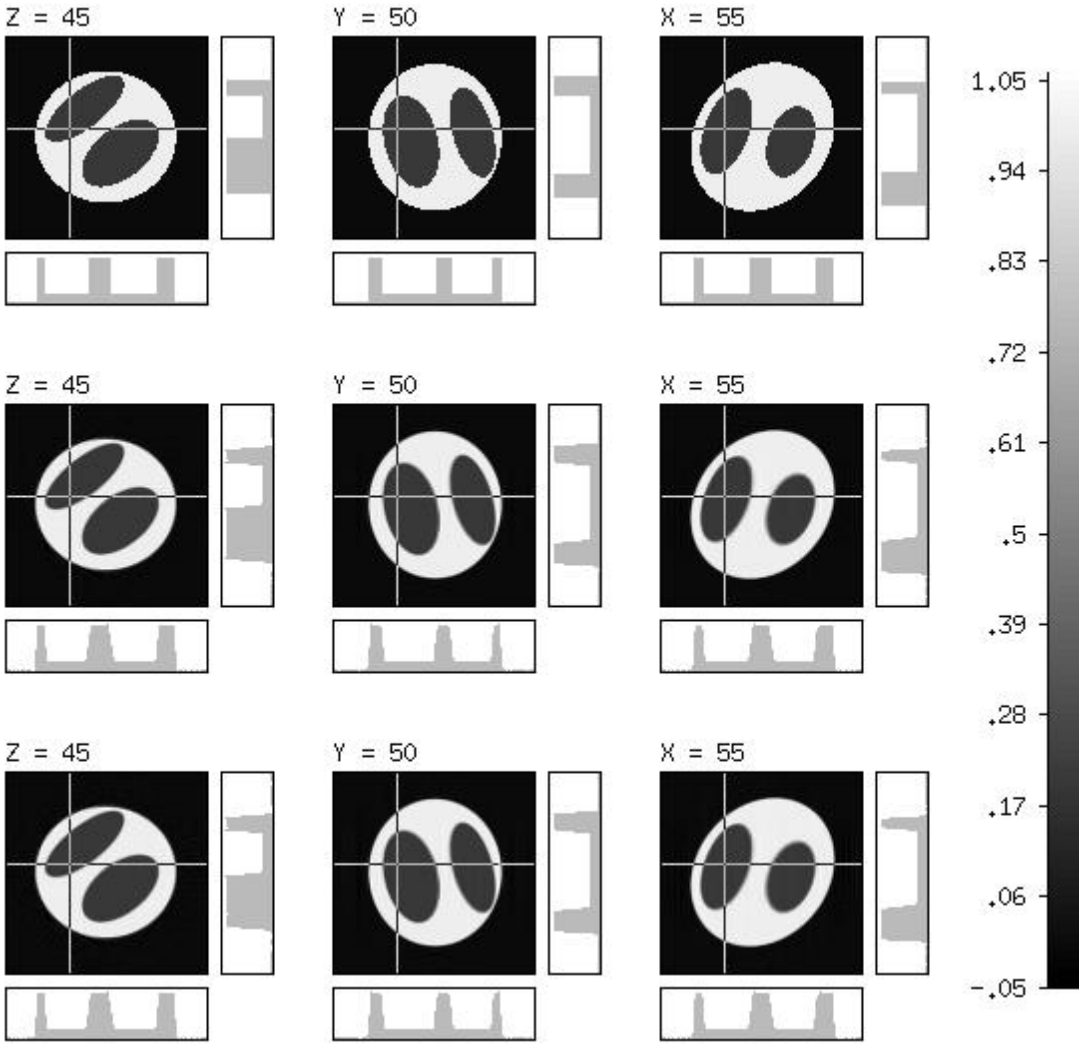


FIG. 4.13 – Résultats de reconstruction pour $\theta_0 = 60°$. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0$. 3ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$.

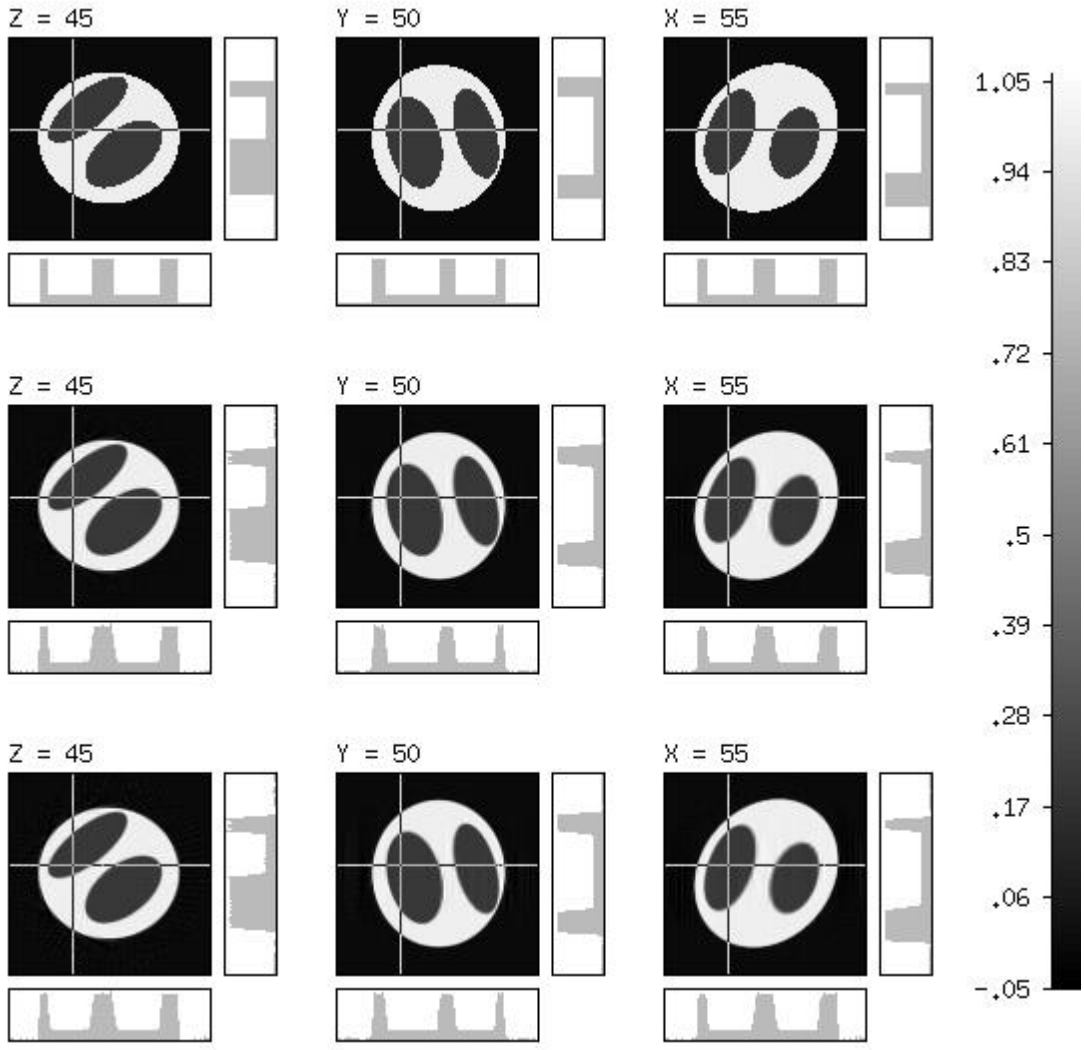


FIG. 4.14 – Résultats de reconstruction pour $\theta_0 = 30°$. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0$. 3ème ligne : méthode EXP-TTR avec $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$.

$\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ pour le point $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Les définitions et détails de calcul de ces fonctions sont donnés à l'annexe C.2. Six groupes de fonctions de transfert correspondant à des configurations différentes sont présentés à la figure 4.15. Remarquons que, pour le calcul des MTF, la gaussienne a été reconstruite avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour reconstruire le fantôme du cœur, et cela pour les 6 reconstructions réalisées. Nous observons tout d'abord que, quels que soient le coefficient d'atténuation μ_0 et la demi-ouverture angulaire θ_0 de la bande équatoriale, les fonctions MTF_x et MTF_y sont identiques. La résolution spatiale est donc uniforme dans les plans perpendiculaires à $\underline{e}_z$.

Dans le cas de la sphère complète ($\theta_0 = 90°$), les trois fonctions de transfert sont assez semblables pour les basses fréquences ($\sigma < 0.8$), ce qui indique une résolution spatiale assez uniforme dans les trois directions principales. Cela était assez prévisible vu la forme de l'ensemble Ω. Pour les plus hautes fréquences, la fonction MTF_z est assez différente de $\mathrm{MTF}_x = \mathrm{MTF}_y$. Cela provient peut-être du fait que les coordonnées sphériques ne réalisent pas un échantillonnage uniforme de la sphère unitaire complète.

Pour la bande équatoriale ($\theta_0 = 60°$ et $\theta_0 = 30°$), les fonctions MTF_z et MTF_x ($= \mathrm{MTF}_y$) sont d'autant plus différentes que l'ouverture angulaire de la bande équatoriale est faible. Plus celle-ci diminue, plus on accentue le caractère axial de la géométrie d'acquisition. Il est donc assez logique que la résolution spatiale soit différente dans la direction $\underline{e}_z$ par rapport aux directions perpendiculaires à $\underline{e}_z$.

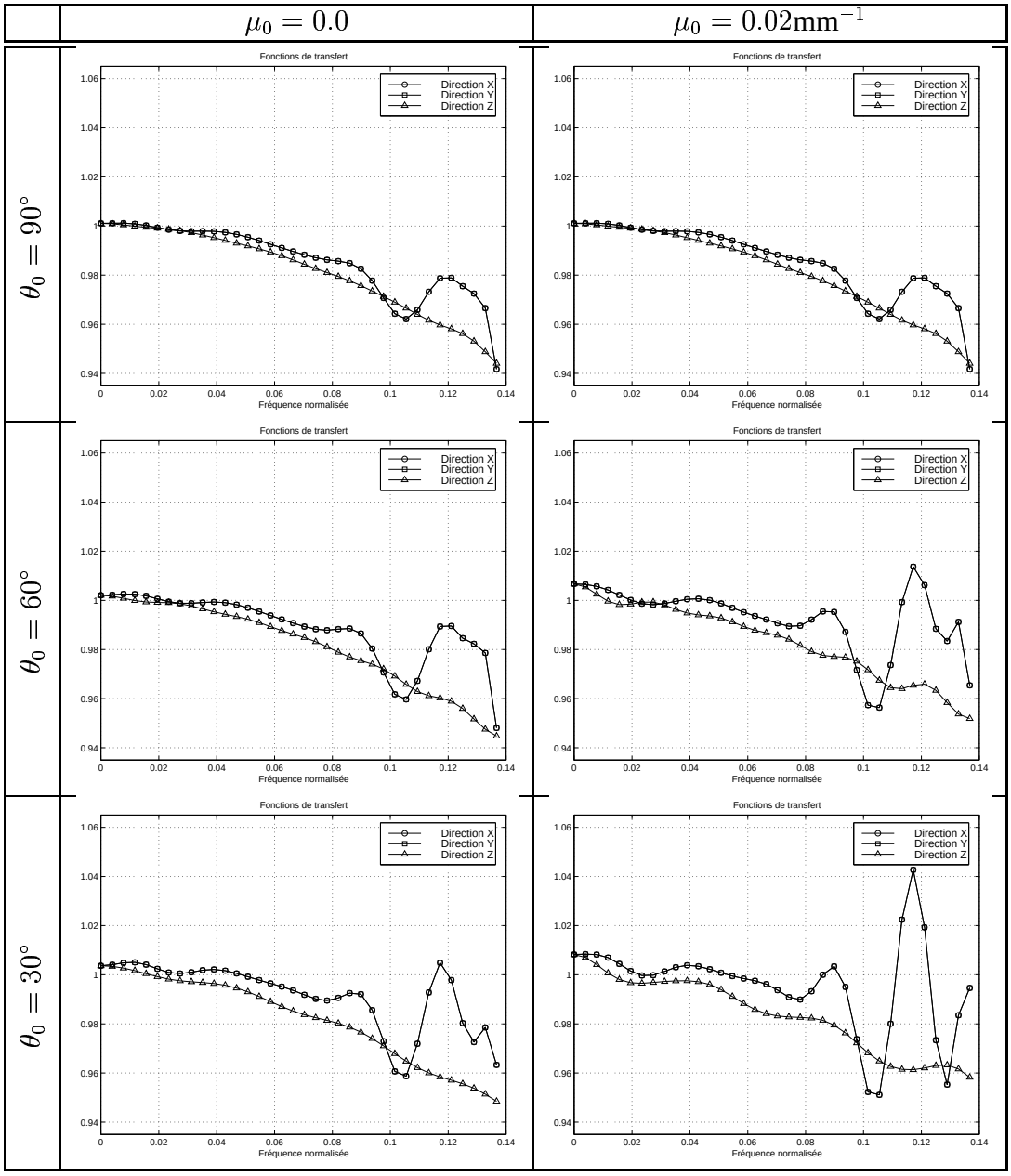


FIG. 4.15 – Fonctions de transfert locales de l'algorithme correspondant au point $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 5

Synthèse de projections parallèles exponentielles

Étant donné un ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à un ensemble Ω de directions de la sphère unitaire, nous montrons dans ce chapitre comment calculer –nous dirons *synthétiser*– des projections parallèles exponentielles dont les directions n'appartiennent pas à Ω. Ce résultat permet de transformer le problème compliqué de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle correspondant à un ensemble Ω complexe en un problème plus simple, en transformant les données sur Ω en données sur un ensemble $\widehat{\Omega}$ plus simple comme un grand cercle de la sphère unitaire (figure 5.1).

Les résultats décrits dans ce chapitre sont originaux et font, en partie, l'objet d'un article [73] présenté à la conférence "6th International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine", ainsi que d'un article [74] paru dans le journal "Physics in Medicine and Biology".

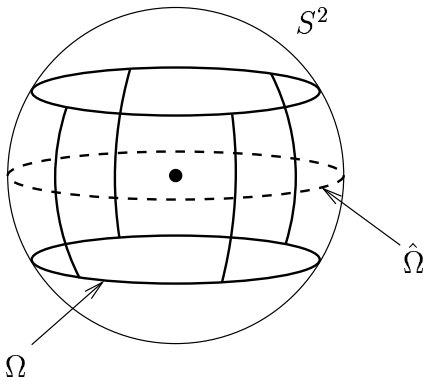


FIG. 5.1 – Illustration d'ensembles Ω (trait plein) et $\widehat{\Omega}$ (trait en pointillé).

5.1 Algorithme de synthèse

5.1.1 Hypothèses de travail

Supposons que les projections parallèles exponentielles

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t}, \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{5.1}$$

soient connues sur un ensemble Ω de directions correspondant à une courbe sur la sphère unitaire. Dans ce chapitre, nous considérons un ensemble Ω pour lequel il existe

– une fonction $\rho(\xi)$ réelle, définie sur $\mathbb{R}$, continue, 2π-périodique, telle que $\rho(\xi) \in]0, \pi/2]$ pour tout $\xi \in [0, 2\pi[$, et

– trois vecteurs unitaires $\underline{\alpha}_0$, $\underline{\beta}_0$ et $\underline{\gamma}_0$ constituant une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$,

tels que tout vecteur $\underline{\theta}$ de Ω peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\theta} = \cos\rho(\xi)\, \underline{\alpha}_0 + \sin\rho(\xi)\, (\cos\xi\, \underline{\beta}_0 + \sin\xi\, \underline{\gamma}_0) \tag{5.2}$$

où les angles $(\xi, \rho(\xi))$ sont les coordonnées sphériques du vecteur $\underline{\theta}$ dans le système d'axes $(\underline{\alpha}_0, \underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0)$. L'ensemble Ω que nous traitons dans ce chapitre est donc une *courbe fermée* sur la sphère unitaire. Nous dirons que le quadruplet $(\underline{\alpha}_0, \underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0, \rho(\xi))$ est une *représentation* de la courbe Ω (figure 5.2). Cette représentation n'est pas unique.

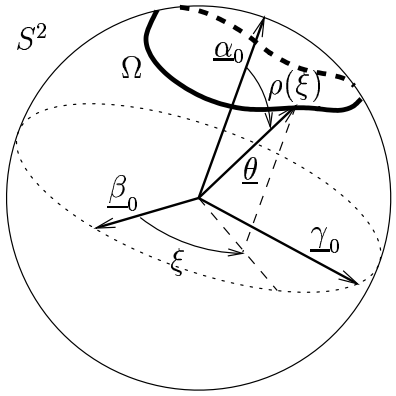


FIG. 5.2 – Représentation $(\underline{\alpha}_0, \underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0, \rho(\xi))$ de la courbe Ω.

D'après la définition de la fonction $\rho(\xi)$, la trajectoire Ω est complètement incluse dans une demi-sphère unitaire[1]. Un cas limite d'ensemble Ω tel qu'envisagé dans ce chapitre est un grand cercle de la sphère unitaire. Considérons le grand cercle $\mathcal{C}(\underline{n})$ orthogonal à un vecteur $\underline{n} \in S^2$. Si on choisit $\underline{\alpha}_0 = \underline{n}$ et $(\underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0)$ comme étant deux vecteurs unitaires orthogonaux entre eux et perpendiculaires à $\underline{n}$, tout vecteur $\underline{\theta}$ de $\mathcal{C}(\underline{n})$ peut se mettre sous la forme (5.2) où $\rho(\xi) = \pi/2$ pour $\xi \in [0, 2\pi[$.

[1]Soit $\underline{n}$ un vecteur unitaire de S^2. La *demi-sphère unitaire*, relative à $\underline{n}$, est l'ensemble des vecteurs unitaires $\underline{x}$ de S^2 tels que $\underline{x}.\underline{n} \geq 0$. On peut ainsi définir une demi-sphère unitaire pour tout vecteur $\underline{n}$ de S^2.

5.1.2 Objectif

Dans un premier temps, nous allons définir les notions d'*intérieur* et d'*intérieur convexe* de l'ensemble Ω. Ensuite, nous énoncerons le théorème de synthèse de projections parallèles exponentielles.

Étant donnée une représentation $(\underline{\alpha}_0, \underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0, \rho(\xi))$ de Ω, nous appelons ***intérieur*** *de* Ω l'ensemble des vecteurs de S^2 défini par

$$I_\Omega = \left\{ \underline{x} = \cos\rho_x \underline{\alpha}_0 + \sin\rho_x(\cos\xi_x \underline{\beta}_0 + \sin\xi_x \underline{\gamma}_0) \in S^2 \ : \ \underline{x}.\underline{\alpha}_0 > \cos\rho(\xi_x) \right\} \quad (5.3)$$

(ξ_x, ρ_x) sont les coordonnées sphériques d'un point $\underline{x}$ de S^2 dans les axes $(\underline{\alpha}_0, \underline{\beta}_0, \underline{\gamma}_0)$. Remarquons que l'intérieur de Ω est un ensemble ouvert car ne contenant pas sa frontière Ω. Elle correspond à la région de S^2 délimitée par Ω et dont la surface est inférieure ou égale à 2π. L'égalité a lieu dans l'unique cas où Ω est un grand cercle. Notons que l'intérieur de Ω est indépendant de la représentation utilisée pour Ω.

Nous appelons ***intérieur convexe*** *de* Ω, et le notons I^c_Ω, l'**ensemble des vecteurs unitaires $\underline{x}$ de l'intérieur de Ω tels que tout grand cercle de S^2 passant par $\underline{x}$ rencontre Ω en deux points exactement**. La figure 5.3 illustre les notions d'intérieur et d'intérieur convexe.

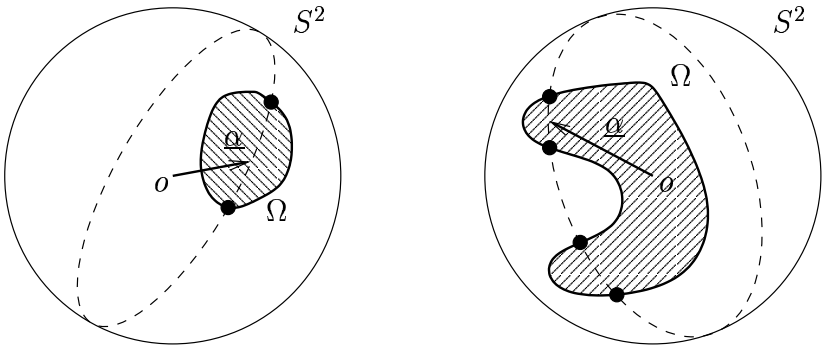


FIG. 5.3 – Illustration des notions d'intérieur et d'intérieur convexe de Ω. La zone hachurée de S^2 représente l'intérieur de Ω ; $\underline{\alpha}$ est un vecteur unitaire de l'intérieur de Ω. (a) L'intérieur de Ω est ici égal à l'intérieur convexe de Ω. (b) L'intérieur convexe de Ω est un sous-ensemble (non représenté sur la figure) de l'intérieur de Ω ; certains grands cercles passant par le point $\underline{\alpha}$ rencontrent Ω en plus de deux points.

Nous pouvons à présent donner un énoncé clair du théorème qui est à la base de notre méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles :

*Soit un ensemble de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ données sur Ω. Pour tout vecteur unitaire $\underline{\alpha}$ appartenant à l'**intérieur convexe***

de Ω, il est possible de calculer la projection

$$p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\alpha})\, e^{\mu_1 t}, \qquad \underline{s}.\underline{\alpha} = 0 \tag{5.4}$$

où le coefficient d'atténuation μ_1 peut être choisi dans $\mathbb{R}$.

Afin de démontrer et d'exposer clairement ce théorème, plusieurs définitions doivent être introduites.

5.1.3 Définitions

Soient un vecteur unitaire $\underline{\alpha}$ appartenant à l'intérieur convexe de Ω et $\mathcal{C}(\underline{\alpha})$ le grand cercle de S^2 orthogonal à $\underline{\alpha}$. Sur ce cercle, nous introduisons quatre vecteurs unitaires $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{\phi}$ et $\underline{\phi}^{\perp}$ de la manière suivante : les deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont choisis de manière arbitraire de telle sorte qu'ils soient perpendiculaires entre eux et tels que $\underline{b} \times \underline{a} = \underline{\alpha}$, tandis que

$$\underline{\phi}^{\perp} = \cos\phi\, \underline{a} + \sin\phi\, \underline{b} \tag{5.5}$$

$$\underline{\phi} = -\sin\phi\, \underline{a} + \cos\phi\, \underline{b} \tag{5.6}$$

où ϕ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$. La figure 5.4 illustre ces différents vecteurs.

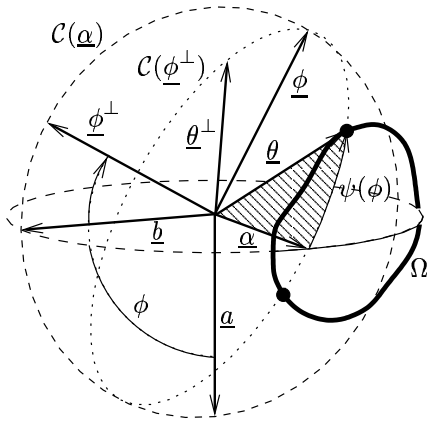


FIG. 5.4 – Illustration des différents vecteurs apparaissant dans la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles.

Par définition de l'intérieur convexe de Ω, le grand cercle $\mathcal{C}(\underline{\phi}^{\perp})$ orthogonal à $\underline{\phi}^{\perp}$, passant donc par le point $\underline{\alpha}$, rencontre Ω en deux points exactement. Nous ne considérons que le point $\underline{\theta}$ de la sphère unitaire donné par

$$\underline{\theta} = \cos\psi(\phi)\, \underline{\alpha} + \sin\psi(\phi)\, \underline{\phi} \tag{5.7}$$

pour lequel l'angle $\psi(\phi)$ se trouve dans le premier ou le second quadrant du système d'axes $(\underline{\alpha}, \underline{\phi})$. Les hypothèses faites sur Ω permettent de déduire que $\psi(\phi)$ est une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$, continue, 2π-périodique et telle que $\psi(\phi) \in]0, \pi[$ pour[2] toute valeur de $\phi \in [0, 2\pi[$. La fonction $\psi(\phi)$ est entièrement déterminée par le contour Ω qui est connu. Nous introduisons finalement le vecteur

$$\begin{aligned} \underline{\theta}^{\perp} &= \underline{\phi}^{\perp} \times \underline{\theta} \\ &= -\sin\psi(\phi)\,\underline{\alpha} + \cos\psi(\phi)\,\underline{\phi} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Avant de décrire l'algorithme de synthèse de projections parallèles exponentielles, nous insistons sur deux choses qu'il est important de garder à l'esprit pour la suite :

- Pour tout vecteur $\underline{\theta}$ fixé sur Ω, les vecteurs $(\underline{\phi}^{\perp}, \underline{\theta}^{\perp})$ sont perpendiculaires à $\underline{\theta}$ et constituent une base orthonormée du plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$.
- Les vecteurs $(\underline{a}, \underline{b})$ sont perpendiculaires à $\underline{\alpha}$ et constituent une base orthonormée du plan de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$. Enfin, l'angle ϕ est un angle polaire dans le plan $\Pi_{\underline{\alpha}}$.

5.1.4 Méthode de synthèse

Comme montré ci-après, le calcul de la projection parallèle exponentielle $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ par la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles est réalisé en deux étapes :

1. Calcul de la transformée de Radon exponentielle $[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l)$ de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec atténuation $\mu_2(\phi)$ dépendant de l'angle. Ce calcul s'effectue par intégration dans le plan de chaque projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connue pour $\underline{\theta} \in \Omega$. La fonction $\mu_2(\phi)$, définie ci-après, est imposée par le choix de μ_1 et la forme de la fonction $\psi(\phi)$.
2. Reconstruction de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ par utilisation de la formule FBP d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle (section 2.2.2),

Nous allons à présent détailler les deux étapes de la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles.

Première étape

Pour $\underline{\alpha}$ fixé, la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ est une fonction bidimensionnelle en la variable $\underline{s}$ dont on peut calculer la transformée de Radon exponentielle. Soit le coefficient d'atténuation $\mu_2(\phi)$ donné par

$$\mu_2(\phi) = \frac{\mu_0 - \mu_1 \cos\psi(\phi)}{\sin\psi(\phi)} \tag{5.9}$$

[2] Vu que $\underline{\alpha}$ n'appartient pas à Ω, la fonction $\psi(\phi)$ ne peut s'annuler. De plus, comme Ω est complètement inclus dans une demi-sphère, $\psi(\phi)$ est toujours inférieure à π.

pour $\phi \in [0, 2\pi[$. La transformée de Radon exponentielle de $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec atténuation $\mu_2(\phi)$ est définie par

$$[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, l\underline{\phi}^{\perp} + s\underline{\phi})\, e^{\mu_2(\phi)s} \tag{5.10}$$

À partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour $\underline{\theta} \in \Omega$, nous montrons ci-après qu'il est possible de calculer la fonction $[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l)$ en utilisant la formule

$$[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, l\underline{\phi}^{\perp} + t\underline{\theta}^{\perp})\, e^{\mu_d(\phi)t} \tag{5.11}$$

où le coefficient d'atténuation $\mu_d(\phi)$ est défini sur $[0, 2\pi[$ par

$$\mu_d(\phi) = \frac{\mu_0\ \cos\psi(\phi) - \mu_1}{\sin\psi(\phi)} \tag{5.12}$$

La formule (5.11) est valable pour tout couple $(\phi, l) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. Le membre de droite de (5.11) constitue un échantillon de la transformée de Radon exponentielle (avec atténuation $\mu_d(\phi)$ dépendant de l'angle) de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. La formule (5.11) nous apprend que pour calculer ***une*** projection exponentielle de Radon de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$, il suffit d'intégrer dans le plan d'***une*** des projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ selon des droites parallèles de direction $\underline{\theta}^{\perp}$. La figure 5.5 illustre la situation. En appliquant la formule (5.11) pour tout point $\underline{\theta}$ de Ω, nous obtenons la transformée de Radon exponentielle de $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ pour tout couple $(\phi, l) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

Démonstration. Afin de prouver la relation (5.11), nous partons de son membre de droite que nous notons $g(\phi, l)$. En utilisant le formalisme de la théorie des distributions, nous pouvons encore écrire

$$g(\phi, l) = \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})\, e^{\mu_d(\phi)\underline{s}.\underline{\theta}^{\perp}}\, \delta(l - \underline{s}.\underline{\phi}^{\perp}) \tag{5.13}$$

De plus, nous utilisons l'impulsion δ_2 de Dirac 2D pour décrire la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$:

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu_0 \underline{\theta}.\underline{x}}\, \delta_2\left(\underline{s} - (\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta})\right), \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{5.14}$$

où $(\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta})$ est la projection orthogonale du point $\underline{x}$ sur le plan $\Pi_{\underline{\theta}}$. En introduisant (5.14) dans (5.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} g(\phi, l) &= \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{\mu_d(\phi)\underline{s}.\underline{\theta}^{\perp}}\, \delta(l - \underline{s}.\underline{\phi}^{\perp}) \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu_0 \underline{\theta}.\underline{x}}\, \delta_2\left(\underline{s} - (\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta})\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\mu_0 \underline{\theta}.\underline{x}} \int_{\underline{s}.\underline{\theta}=0} d\underline{s}\, e^{\mu_d(\phi)\underline{s}.\underline{\theta}^{\perp}}\, \delta(l - \underline{s}.\underline{\phi}^{\perp})\, \delta_2(\underline{s} - (\underline{x} - (\underline{x}.\underline{\theta})\underline{\theta})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\underline{x}.\left(\mu_0\underline{\theta} + \mu_d(\phi)\underline{\theta}^{\perp}\right)}\, \delta(l - \underline{x}.\underline{\phi}^{\perp}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

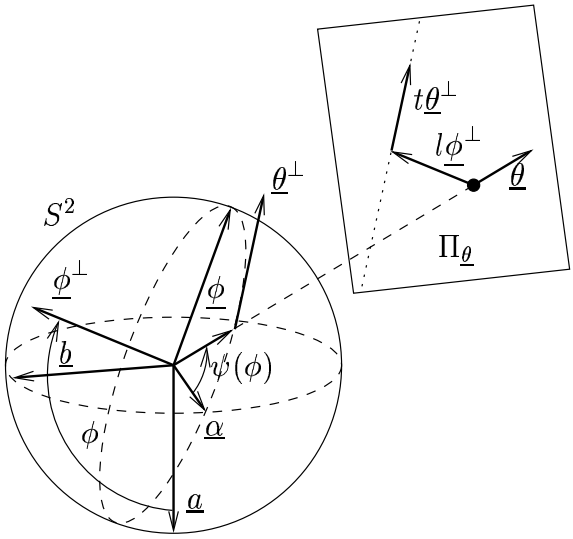


FIG. 5.5 – Illustration de la méthode de synthèse : intégration dans le plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ selon des droites de direction $\underline{\theta}^{\perp}$. Par souci de clarté de la figure, nous avons translaté le plan de la projection $\Pi_{\underline{\theta}}$ dans la direction $\underline{\theta}$.

car $\underline{\theta}.\underline{\theta}^{\perp} = 0$ et $\underline{\theta}.\underline{\phi}^{\perp} = 0$. En utilisant les expressions (5.12) pour $\mu_d(\phi)$, (5.7) et (5.8) pour $\underline{\theta}$ et $\underline{\theta}^{\perp}$, il vient

$$\begin{aligned}
\mu_0\underline{\theta} + \mu_d(\phi)\underline{\theta}^{\perp} &= \mu_0 \left[\cos\psi(\phi)\,\underline{\alpha} + \sin\psi(\phi)\,\underline{\phi}\right] \\
&\quad + \frac{\mu_0\,\cos\psi(\phi) - \mu_1}{\sin\psi(\phi)} \left[-\sin\psi(\phi)\,\underline{\alpha} + \cos\psi(\phi)\,\underline{\phi}\right] \\
&= \mu_1\underline{\alpha} + \left[\mu_0\,\sin\psi(\phi) + \frac{\mu_0\,\cos^2\psi(\phi) - \mu_1\,\cos\psi(\phi)}{\sin\psi(\phi)}\right] \underline{\phi} \\
&= \mu_1\underline{\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_1\cos\psi(\phi)}{\sin\psi(\phi)}\,\underline{\phi} \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, nous observons que le coefficient précédant $\underline{\phi}$ est égal à l'expression (5.9) pour $\mu_2(\phi)$. Il vient

$$g(\phi, l) = \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{\underline{x}.\left(\mu_1\underline{\alpha} + \mu_2(\phi)\underline{\phi}\right)}\, \delta(l - \underline{x}.\underline{\phi}^{\perp}) \qquad (5.17)$$

Une description géométrique de $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$ est donnée à la figure 5.6.

Nous appliquons finalement le changement de variables $\underline{x} = \underline{s} + t\underline{\alpha}$ avec $\underline{s}.\underline{\alpha} = 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Il vient

$$g(\phi, l) = \int_{\underline{s}.\underline{\alpha}=0} d\underline{s} \left\{\int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\alpha})\, e^{\mu_1 t}\right\} e^{\mu_2(\phi)\underline{s}.\underline{\phi}}\, \delta(l - \underline{s}.\underline{\phi}^{\perp}) \qquad (5.18)$$

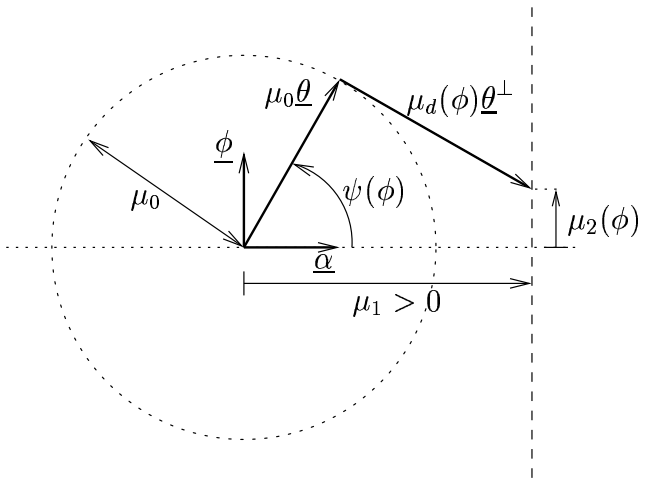


FIG. 5.6 – Interprétation géométrique de $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$. Dans cet exemple, $\mu_2(\phi) > 0$ et $\mu_d(\phi) < 0$.

Le terme entre accolades correspond à la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ et nous reconnaissons en $g(\phi, l)$ la transformée de Radon exponentielle de $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ dans le formalisme de la théorie des distributions. La fonction $g(\phi, l)$ est donc bien identique à (5.10). ■

Deuxième étape

Comme démontré à la section 2.2.2, il est possible d'inverser la transformée de Radon exponentielle avec atténuation $\mu_2(\phi)$ dépendant de l'angle à condition que la fonction $\mu_2(\phi)$ soit *bornée, dérivable* et 2π*-périodique*. Dans le cas de la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles, la fonction $\mu_2(\phi)$ est entièrement déterminée par $\psi(\phi)$ (voir équation (5.9)), et donc par la forme de la courbe Ω. La méthode développée dans ce chapitre n'est valable que si la fonction $\mu_2(\phi)$ vérifie les hypothèses citées ci-avant. Montrons que la fonction $\mu_2(\phi)$ est bornée, 2π-périodique et dérivable.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mu_2(\phi)$ est bornée. D'après les hypothèses faites sur Ω et vu que $\underline{\alpha} \notin \Omega$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\psi(\phi) \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ pour $\phi \in [0, 2\pi[$. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{\mu_0 - \mu_1 \cos\psi(\phi)}{\sin\psi(\phi)} < M \quad \forall\phi \in [0, 2\pi[\tag{5.19}$$

ce qui indique que la fonction $\mu_2(\phi)$ est bornée.

La propriété de 2π-périodicité de la fonction $\mu_2(\phi)$ découle de l'expression (5.9) de $\mu_2(\phi)$. Étant donné que $\psi(\phi)$ est 2π-périodique, il en va de même pour $\mu_2(\phi)$.

Montrons finalement que $\mu_2(\phi)$ est dérivable presque partout sur $[0, 2\pi[$. La fonction $\psi(\theta)$ est continue et donc dérivable sauf peut-être en quelques valeurs singulières de ϕ correspondant à des points anguleux de la trajectoire Ω. La dérivée de la fonction $\mu_2(\phi)$ est donnée par

$$\mu_2'(\phi) = \psi'(\phi)\,\frac{\mu_1 - \mu_0\,\cos\psi(\phi)}{\sin^2\psi(\phi)} \tag{5.20}$$

où $\psi'(\phi)$ est la dérivée première de $\psi(\phi)$. $\mu_2(\phi)$ est donc dérivable presque partout. Dans la suite, nous supposerons que $\psi(\phi)$ est dérivable sur $[0, 2\pi[$ afin d'éviter tout problème de singularité de la fonction $\mu_2'(\phi)$. Avant de conclure cette démonstration, notons que, lors de l'utilisation de la méthode de synthèse pour un cas précis, il faudra veiller à ce que la fonction $\psi(\phi)$ soit bien dérivable partout. ■

Vu que la fonction $\mu_2(\phi)$ vérifie les hypothèses nécessaires, la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ est reconstruite par la formule suivante (section 2.2.2) :

$$p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s}) = \int_0^{2\pi} d\phi\,[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)]^F(\phi, \underline{s}.\underline{\phi}^{\perp})\,e^{-\mu_2(\phi)\underline{s}.\underline{\phi}}, \qquad \underline{s}.\underline{\alpha} = 0 \tag{5.21}$$

où les projections exponentielles de Radon filtrées sont données par

$$[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)]^F(\phi, l) = \int_{\mathbb{R}} dl'\,[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l - l')\,k_{\mu_2}(\phi, l') \tag{5.22}$$

Le filtre k_{μ_2} est donné par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_2}](\phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} + \frac{j}{2}\,\mathrm{sign}(\sigma)\,\mu_2'(\phi) & \text{si } |\sigma| > |\mu_2(\phi)|/2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.23}$$

5.2 Un cas particulier important : un cercle de S^2

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà beaucoup parlé de grand cercle de la sphère unitaire. Nous généralisons à présent la notion de grand cercle par celle de *cercle* de la sphère unitaire. Ensuite, nous étudierons le comportement numérique de la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles pour ce type de trajectoire. Au chapitre 6, nous verrons que ce résultat constitue la base d'une méthode d'inversion exacte et stable de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH.

5.2.1 Définitions

Nous appelons *cercle* $C(\underline{c}, \gamma)$ de centre $\underline{c} \in S^2$ et d'ouverture angulaire 2γ le sous-ensemble de S^2 défini par

$$C(\underline{c}, \gamma) = \left\{ \underline{x} \in S^2 \ : \ \underline{c}.\underline{x} = \cos\gamma \right\} \tag{5.24}$$

où $\gamma \in]0, \pi/2]$. En particulier, le cercle de centre $\underline{c}$ et d'ouverture angulaire π s'identifie au grand cercle $\mathcal{C}(\underline{c})$ de S^2, c'est-à-dire $C(\underline{c}, \pi/2) = \mathcal{C}(\underline{c})$. L'intérieur convexe de $C(\underline{c}, \gamma)$, qui s'identifie à son intérieur, est noté $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$ et peut s'écrire sous la forme

$$I^c_{C(\underline{c},\gamma)} = I_{C(\underline{c},\gamma)} = \left\{ \underline{x} \in S^2 \ : \ \underline{c}.\underline{x} > \cos\gamma \right\} \tag{5.25}$$

La figure 5.7 illustre un cercle $C(\underline{c}, \gamma)$ ainsi que son intérieur convexe $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$.

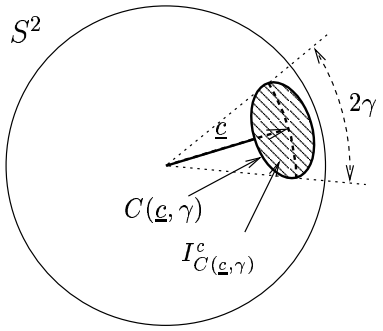


FIG. 5.7 – Illustration d'un cercle $C(\underline{c}, \gamma)$ de S^2 et de son intérieur convexe $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$.

5.2.2 Étude du comportement numérique de la méthode de synthèse

Dans cette section, nous étudions le comportement numérique de la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles appliquée à un cercle de S^2 en fonction de

- la valeur du coefficient d'atténuation μ_1 de la projection à synthétiser,
- l'ouverture angulaire (2γ) du cercle,
- la position du vecteur $\underline{\alpha}$ dans l'intérieur convexe du cercle.

Soit $\Omega = C(\underline{c}, \gamma)$ le cercle de S^2 de centre $\underline{c}$ et d'ouverture angulaire 2γ. Supposons les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour tout $\underline{\theta} \in \Omega$. Nous montrons ci-après que la fonction $\psi(\phi)$ est dérivable sur $[0, 2\pi[$, quel que soit $\underline{\alpha}$ appartenant à $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$. Notre méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles est donc

valable pour tout $\underline{\alpha}$ appartenant à $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$.

Il est intéressant d'étudier l'allure des coefficients d'atténuation $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$ pour différentes ouvertures angulaires 2γ du cercle et différentes positions du vecteur $\underline{\alpha}$ dans $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$. Les valeurs de $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$ vont en effet influencer considérablement le comportement numérique de notre méthode de synthèse. Ils apparaissent tous deux dans des exponentielles qui peuvent prendre des valeurs élevées si les valeurs de μ_d et μ_2 ne sont pas contrôlées, provoquant ainsi l'apparition d'artéfacts dans les projections synthétisées.

Nous proposons ici d'étudier deux ouvertures angulaires particulières du cercle correspondant à $\gamma = 30°,\ 60°$ et trois valeurs différentes du coefficient d'atténuation : $\mu_1 = +\mu_0, 0, -\mu_0$. La première valeur étudiée ($\mu_1 = \mu_0$) revient à synthétiser des projections parallèles exponentielles dont le coefficient d'atténuation est identique à celui des projections données. La seconde valeur ($\mu_1 = 0$) correspond à synthétiser des projections parallèles à partir de projections parallèles exponentielles, ce qui est tout à fait surprenant. Finalement, la valeur $\mu_1 = -\mu_0$ permet d'étudier le comportement numérique de la méthode pour un coefficient d'atténuation μ_1 négatif. Remarquons que l'étude du cas $\mu_1 = -\mu_0$ et $\underline{\alpha} \in I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$ revient à étudier la méthode pour la synthèse de la projection $p_{-\mu_0}(\underline{\alpha}, \underline{s}) = p_{\mu_0}(-\underline{\alpha}, \underline{s})$.

Nous allons également déterminer les conditions sous lesquelles les deux coefficients $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$ restent confinés dans un intervalle déterminé, permettant ainsi de limiter les risques liés au calcul numérique des exponentielles. Un choix pratique de cet intervalle est relativement difficile à réaliser. Nous proposons plutôt de déterminer les conditions sous lesquelles les fonctions $|\mu_d(\phi)|$ et $|\mu_2(\phi)|$ restent inférieures à μ_0 pour toute valeur de $\phi \in [0, 2\pi[$. Introduisons les grandeurs normalisées suivantes :

$$\widehat{\mu}_d(\phi) = \frac{\mu_d(\phi)}{\mu_0} \tag{5.26}$$

$$\widehat{\mu}_2(\phi) = \frac{\mu_2(\phi)}{\mu_0} \tag{5.27}$$

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} \tag{5.28}$$

Nous rechercherons donc les conditions sous lesquelles $|\widehat{\mu}_d(\phi)|$ et $|\widehat{\mu}_2(\phi)|$ restent inférieures à 1 pour toute valeur $\phi \in [0, 2\pi[$.

Détermination de l'angle $\psi(\phi)$

Dans le cas d'un cercle de la sphère unitaire, il est possible de déterminer l'expression analytique de la fonction $\psi(\phi)$ permettant de déterminer les coefficients $\widehat{\mu}_d(\phi)$ et $\widehat{\mu}_2(\phi)$. La figure 5.8 correspond à la figure 5.4 adaptée au cas $\Omega = C(\underline{c}, \gamma)$. On y voit

d'ailleurs apparaître le centre $\underline{c}$ du cercle.

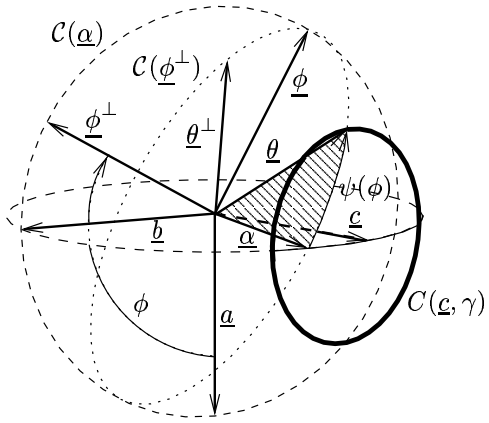


FIG. 5.8 – Description des différents vecteurs apparaissant dans la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles dans le cas du cercle $C(\underline{c},\gamma)$.

En raison de la symétrie des ensembles $C(\underline{c},\gamma)$ et $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$ autour de $\underline{c}$, le comportement numérique de la méthode sera identique pour tout vecteur $\underline{\alpha}$ présentant le même angle avec le vecteur $\underline{c}$. Nous notons cet angle $(k\gamma)$ où γ est la demi-ouverture angulaire du cercle étudié et k est un paramètre réel compris dans l'intervalle $[0,1[$, c'est-à-dire

$$\cos(k\gamma) = \underline{c}.\underline{\alpha} \tag{5.29}$$

Théoriquement, k ne peut pas prendre la valeur 1 sinon le vecteur $\underline{\alpha}$ se trouverait sur le cercle $C(\underline{c},\gamma)$, auquel cas la méthode de synthèse ne fonctionnerait pas. Néanmoins, nous montrerons certains résultats de l'étude pour $k = 1$ également prouvant ainsi le mauvais comportement de notre méthode dans ce cas particulier.

Afin d'obtenir une expression attrayante de $\psi(\phi)$, nous avons choisi les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de telle sorte que

$$\underline{a} = \frac{\underline{c} \times \underline{\alpha}}{\|\underline{c} \times \underline{\alpha}\|} \tag{5.30}$$

$$\underline{b} = \underline{a} \times \underline{\alpha} \tag{5.31}$$

Voir figure 5.8. L'angle $\psi(\phi)$ est alors donné par

$$\psi(\phi) = 2\ \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(k\gamma)\ \cos\phi + \sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2(k\gamma)\ \sin^2\phi}}{\cos\gamma + \cos(k\gamma)}\right) \tag{5.32}$$

La fonction $\psi(\phi)$ est représentée à la figure 5.9 pour $\gamma = 30°$ et différentes valeurs de k. Si $k \neq 1$, cette fonction est *continue*, *dérivable* et 2π-*périodique*. Elle présente un minimum, noté ψ_m, en $\varphi = 0$ (et en 2π par périodicité) et un maximum, noté ψ_M, en

$\phi = \pi$. De plus, le choix réalisé pour $\underline{a}$ implique que le graphe de la fonction $\psi(\phi)$ est symétrique par rapport à $\phi = \pi$. Les extremums sont donnés par

$$\psi_M = \gamma(1 + k) \tag{5.33}$$

$$\psi_m = \gamma(1 - k) \tag{5.34}$$

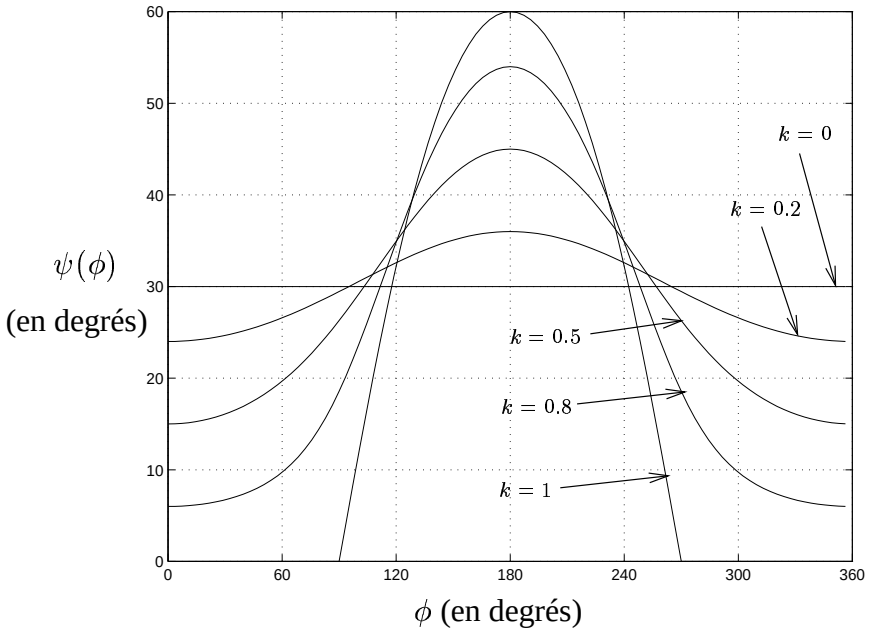


FIG. 5.9 – Graphe de la fonction $\psi(\phi)$ pour $\gamma = 30°$.

Pour $k = 1$, nous observons à la figure 5.9 que la fonction $\psi(\phi)$ est identiquement nulle pour certaines valeurs de ϕ, ce qui montre que la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles ne peut être utilisée lorsque le vecteur $\underline{\alpha}$ se trouve sur Ω (voir équations (5.9) et (5.12)).

Démonstration. Pour déterminer l'expression (5.32) de la fonction $\psi(\phi)$, nous exprimons que le vecteur $\underline{\theta} = \cos\psi(\phi)\,\underline{\alpha} + \sin\psi(\phi)\,\underline{\phi}$ appartient au cercle $C(\underline{c}, \gamma)$, ce qui se traduit par

$$\underline{\theta}.\underline{c} = \cos\gamma \tag{5.35}$$

De plus, dans le système d'axes $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\alpha})$, le vecteur $\underline{c}$ peut s'exprimer par

$$\underline{c} = \cos(k\gamma)\,\underline{\alpha} - \sin(k\gamma)\,\underline{b} \tag{5.36}$$

La combinaison des deux équations précédentes fournit, pour ϕ fixé, l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos\psi(\phi)\,\cos(k\gamma) - \sin\psi(\phi)\,\sin(k\gamma)\,\cos\phi = \cos\gamma \tag{5.37}$$

Ne gardant pour $\psi(\phi)$ que la solution située dans le premier ou le second quadrant du cercle trigonométrique ($\psi(\phi) \in]0, \pi[$), la résolution de cette équation fournit l'expression (5.32). ■

Les expressions normalisées des coefficients d'atténuation $\mu_2(\phi)$ et $\mu_d(\phi)$ sont données par

$$\widehat{\mu}_2(\phi) = \frac{1 - \widehat{\mu}_1 \cos\psi(\phi)}{\sin\psi(\phi)} \tag{5.38}$$

$$\widehat{\mu}_d(\phi) = \frac{\cos\psi(\phi) - \widehat{\mu}_1}{\sin\psi(\phi)} \tag{5.39}$$

Premier cas : $\widehat{\mu}_1 = 1$

La figure 5.10a donne une interprétation géométrique de la situation. Les grandeurs normalisées se simplifient en

$$\widehat{\mu}_2(\phi) = -\widehat{\mu}_d(\phi) = \tan\frac{\psi(\phi)}{2} \tag{5.40}$$

Vu que $\psi(\phi) \in]0, \pi[$ quel que soit ϕ, $\widehat{\mu}_2(\phi)$ est toujours positif et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ toujours négatif. Ces deux coefficients sont, en valeur absolue, inférieurs à l'unité lorsque $\tan(\psi(\phi)/2) \leq 1$ pour tout ϕ. Vu que la valeur maximale de $\psi(\phi)$ est égale à $\gamma(1+k)$, cette condition est vérifiée lorsque

$$\gamma(1+k) \leq \frac{\pi}{2} \tag{5.41}$$

Si $\gamma \leq \pi/4$, cette condition est toujours rencontrée quelle que soit la valeur de $k \in [0, 1[$. En d'autres termes, si l'ouverture angulaire 2γ du cercle est inférieure à $\pi/2$, les valeurs $|\widehat{\mu}_d(\phi)|$ et $|\widehat{\mu}_d(\phi)|$ restent inférieures à l'unité quelle que soit la position du vecteur $\underline{\alpha}$ dans $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$. La figure 5.11 donne le graphe des fonctions $\widehat{\mu}_2(\phi)$ et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ pour différents cas.

Deuxième cas : $\widehat{\mu}_1 = 0$

La figure 5.10b donne une interprétation géométrique de la situation. Les coefficients normalisés se simplifient en

$$\widehat{\mu}_2(\phi) = \frac{1}{\sin\psi(\phi)} \tag{5.42}$$

$$\widehat{\mu}_d(\phi) = \cot\psi(\phi) \tag{5.43}$$

Vu que $\psi(\phi) \in]0, \pi[$ quel que soit ϕ, la valeur de $\widehat{\mu}_2(\phi)$ est toujours supérieure ou égale à l'unité. Elle est constante et égale à 1 dans le cas particulier où $\psi(\phi) = \pi/2$ pour tout $\phi \in [0, 2\pi[$, c'est-à-dire lorsque le cercle considéré est un grand cercle de normale $\underline{\alpha}$.

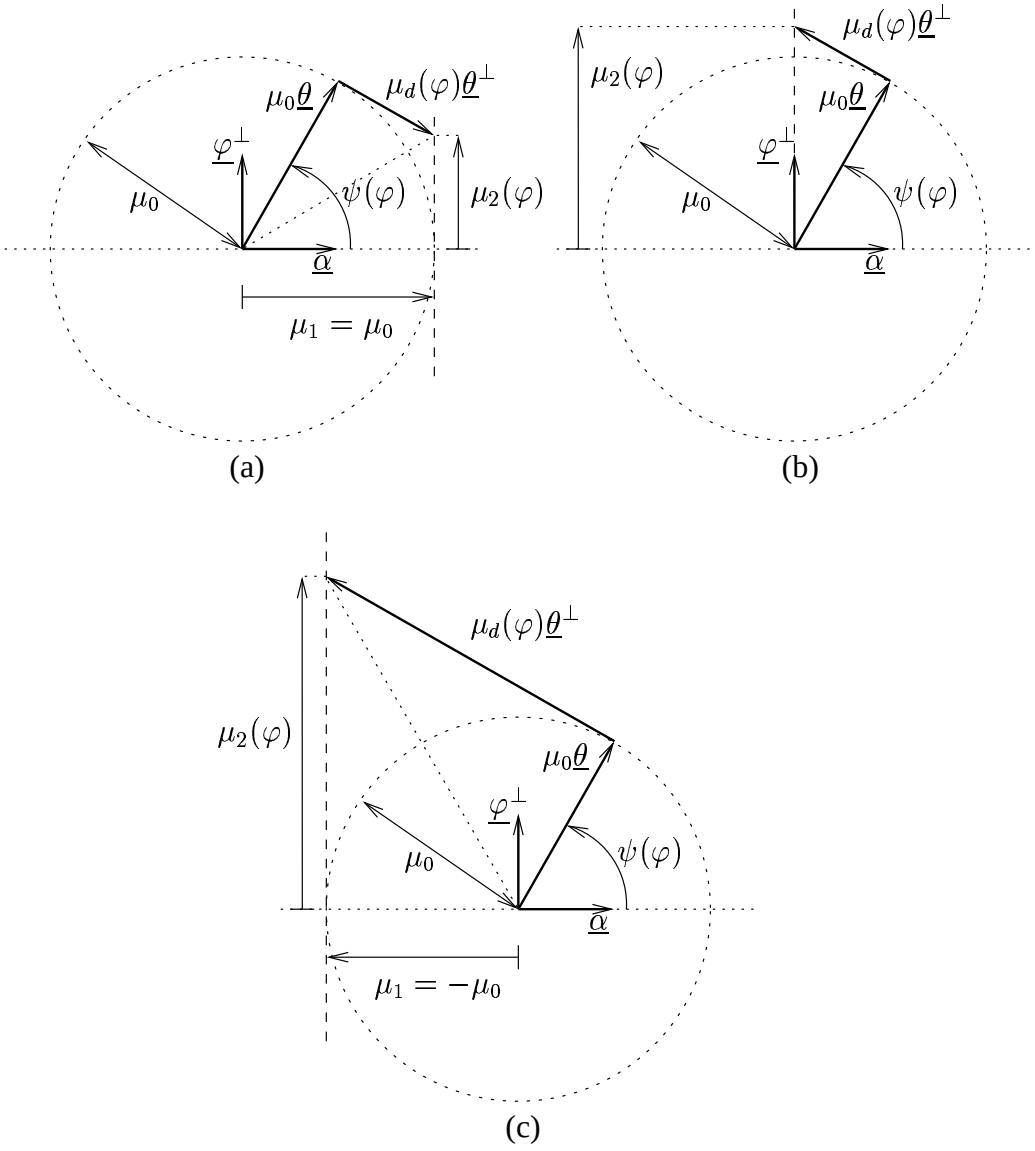


FIG. 5.10 – Interprétation géométrique des coefficients d'atténuation $\mu_d(\phi)$ et $\mu_2(\phi)$: (a) $\widehat{\mu}_1 = 1$ (b) $\widehat{\mu}_1 = 0$ (c) $\widehat{\mu}_1 = -1$.

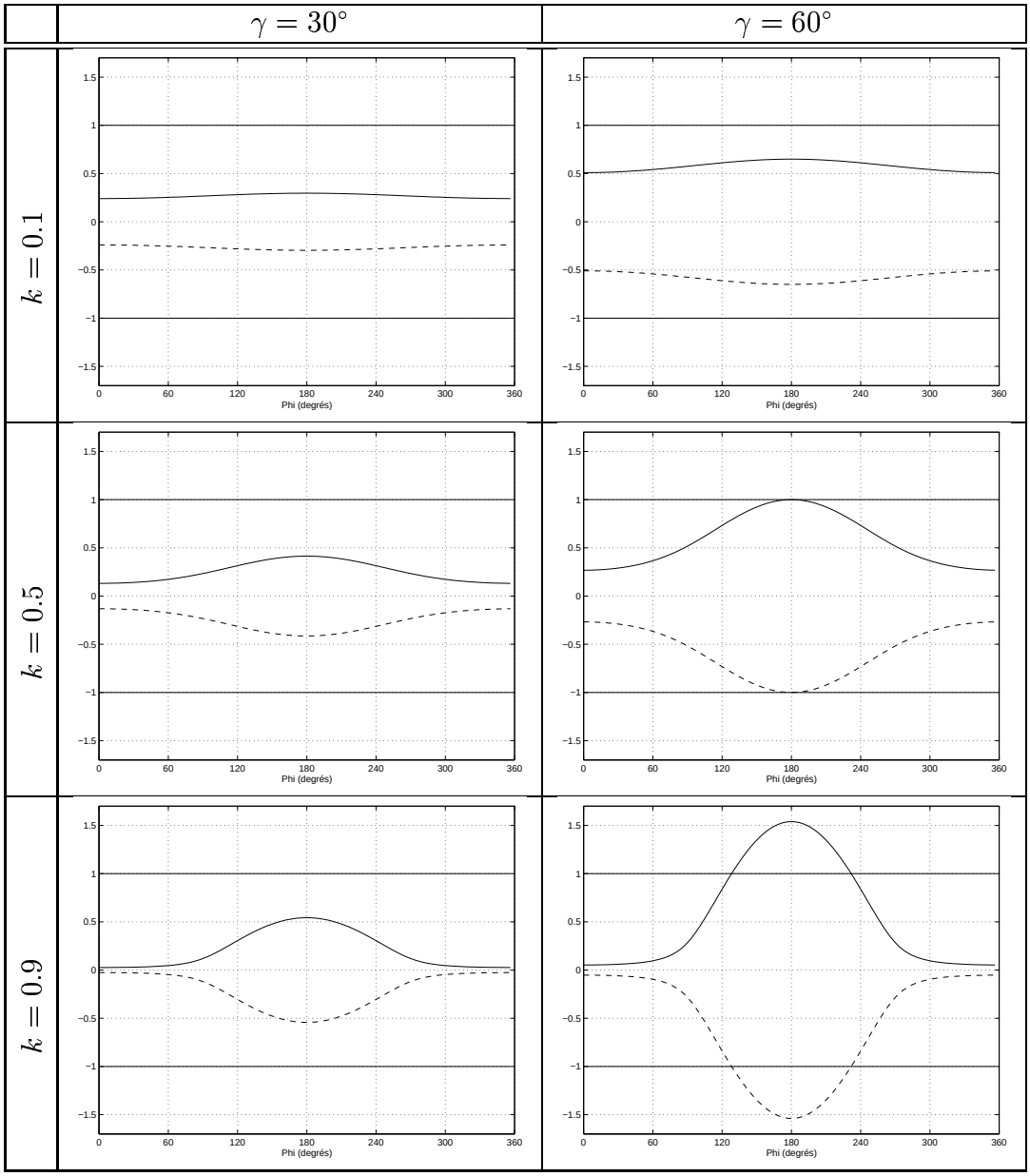


FIG. 5.11 – Coefficients d'atténuation $\widehat{\mu}_2(\phi)$ (trait plein) et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ (trait en pointillé) pour $\widehat{\mu}_1 = 1$.

L'observation de (5.42) nous apprend que $\max_\phi \widehat{\mu}_2(\phi)$ est d'autant plus grand que $\psi(\phi)$ est proche de 0 ou de π. La valeur minimale de $\psi(\phi)$ étant égale à $\gamma(1-k)$, $\max_\phi \widehat{\mu}_2(\phi)$ est d'autant plus grand que k est proche de 1 ou que γ est proche de 0. En d'autres termes, la méthode de synthèse risque de fournir des résultats de mauvaise qualité lorsqu'elle est appliquée à des cercles de faible ouverture angulaire ou lorsque l'angle entre le vecteur $\underline{\alpha}$ et le vecteur $\underline{c}$ tend vers γ (c'est-à-dire lorsque $\underline{\alpha}$ "s'approche" du cercle). Un raisonnement analogue peut être mené lorsque $\psi(\phi)$ est proche de π. La figure 5.12 donne le graphe des fonctions $\widehat{\mu}_2(\phi)$ et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ pour différents cas.

Troisième cas : $\widehat{\mu}_1 = -1$

La figure 5.10c donne une interprétation géométrique de la situation. Les coefficients normalisés se simplifient en

$$\widehat{\mu}_2(\phi) = \widehat{\mu}_d(\phi) = \cot\frac{\psi(\phi)}{2} \tag{5.44}$$

et sont donc égaux. Maintenir la valeur de ces coefficients, en valeur absolue, inférieure à l'unité pour toute valeur de ϕ, revient à imposer la condition

$$\psi(\phi) \geq \pi/2$$

pour tout ϕ, ce qui est impossible (voir équation (5.34)). La figure 5.13 donne le graphe des fonctions $\widehat{\mu}_2(\phi)$ et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ pour différents cas. L'observation de cette figure laisse présager un mauvais comportement numérique de la méthode de synthèse lorsque l'on désire synthétiser une projection parallèle exponentielle dont le coefficient d'atténuation μ_1 est négatif.

Nous pouvons à présent tirer quelques conclusions sur l'étude qui vient d'être faite. Lorsque le cercle $C(\underline{c},\gamma)$ présente une ouverture angulaire (2γ) inférieure à $\pi/2$, nous sommes assuré que, pour la synthèse de toute projection parallèle exponentielle $p_{\mu_0}(\underline{\alpha},\underline{s})$ avec $\underline{\alpha} \in I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$, les coefficients d'atténuation $\mu_2(\phi)$ et $\mu_d(\phi)$ restent toujours confinés dans l'intervalle $[-\mu_0,+\mu_0]$. Cette constatation peut présager un bon comportement numérique de la méthode de synthèse dans ces conditions. Dans tous les autres cas étudiés, ces coefficients peuvent prendre des valeurs supérieures à 1 pour certaines valeurs de ϕ.

5.3 Vérification de la méthode

Dans cette section, nous proposons de vérifier la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles. Pour nos simulations, nous utilisons un fantôme 3D simplifié du cœur composé de trois ellipsoïdes. Une description complète de ce fantôme est donnée à l'annexe C.1. Il doit être clair que cette section ne porte que sur la

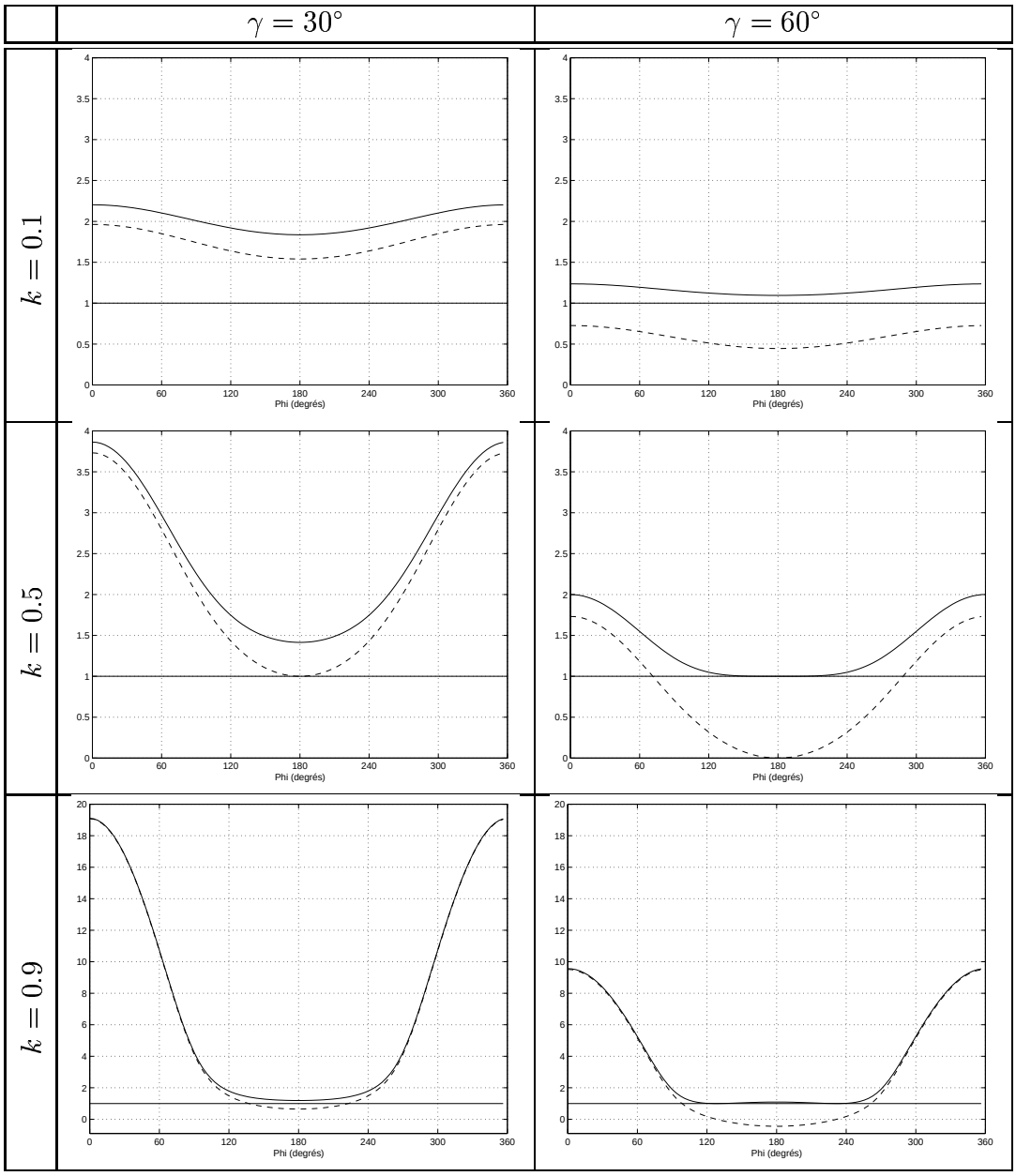


FIG. 5.12 – Coefficients d'atténuation $\widehat{\mu}_2(\phi)$ (trait plein) et $\widehat{\mu}_d(\phi)$ (trait en pointillé) pour $\widehat{\mu}_1 = 0$.

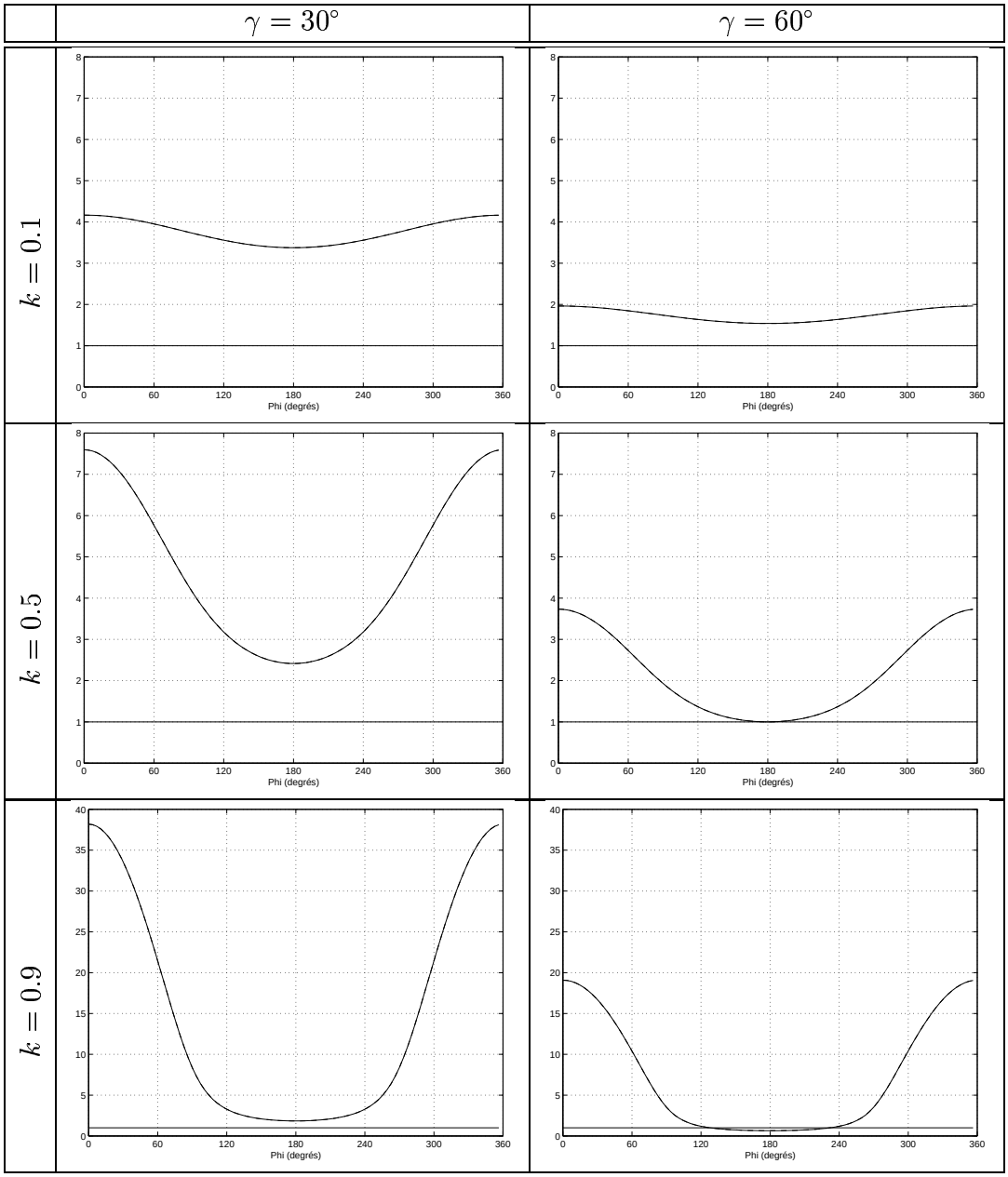


FIG. 5.13 – Coefficients d'atténuation $\widehat{\mu}_2(\phi) = \widehat{\mu}_d(\phi)$ pour $\widehat{\mu}_1 = -1$.

vérification de la méthode. Les données de simulation correspondent à un jeu de projections parallèles exponentielles idéales, c'est-à-dire calculées de manière analytique sur base des définitions des ellipsoïdes constituant le fantôme.

Dans cette étude, nous nous limitons au cas particulier d'un cercle $C(\underline{c}, \gamma)$ de la sphère unitaire.

5.3.1 Détails d'implémentation

Soit un ensemble de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour tout $\underline{\theta} \in C(\underline{c}, \gamma)$ et $\underline{\alpha}$ un vecteur unitaire appartenant à $I^c_{C(\underline{c},\gamma)}$. D'une manière générale, la synthèse de la projection parallèle exponentielle $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$, à partir des projections connues, peut être implémentée de la manière suivante :

• **Étape 1.** Calculer $[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l)$ pour $\phi \in [0, 2\pi[$, $l \in \mathbb{R}$ en utilisant la formule (5.11).
• **Étape 2.** Reconstruire la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ par inversion de sa transformée de Radon exponentielle en utilisant la formule (5.21).

L'étape 1 du processus de synthèse consiste, pour chaque valeur de ϕ fixée, à intégrer dans le plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ où $\underline{\theta} = \cos\psi(\phi)\,\underline{\alpha} + \sin\psi(\phi)\,\underline{\phi}$. Pour nos simulations, nous avons opté pour un échantillonnage uniforme en la variable ϕ, c'est-à-dire

$$\phi_k = k\,\Delta\phi, \quad \Delta\phi = 2\pi/N_\phi, \quad k = 0, \ldots, (N_\phi - 1) \tag{5.45}$$

où $\Delta\phi$ est le pas d'échantillonnage et N_ϕ le nombre d'échantillons. Le choix de cet échantillonnage est dicté par la manière dont nous avons implémenté l'étape 2, c'est-à-dire la reconstruction de $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ par l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées (formules (5.21) et (5.22)). Passons à présent en revue les détails relatifs à l'implémentation des deux étapes du processus de synthèse. Par souci de clarté, nous notons $g(\phi, l)$ la fonction $[\mathcal{R}_{\mu_2} p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)](\phi, l)$.

Implémentation de l'étape 1

Dans un premier temps, nous utilisons les vecteurs $\underline{\phi}^\perp$ et $\underline{\theta}^\perp$, constituant une base orthonormée du plan de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$, afin d'écrire les données sous la forme

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s} = l\underline{\phi}^\perp + t\underline{\theta}^\perp) = \int_{\mathbb{R}} dt'\, f(l\underline{\phi}^\perp + t\underline{\theta}^\perp + t'\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t'} \tag{5.46}$$

Étant donné le choix réalisé pour l'échantillonnage selon la variable ϕ, nous supposons les projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour un ensemble de directions

$$\underline{\theta}_k = \cos\psi(\phi_k)\,\underline{\alpha} + \sin\psi(\phi_k)\,\underline{\phi}_k \tag{5.47}$$

où $\underline{\phi}_k = -\sin\phi_k\,\underline{a} + \cos\phi_k\,\underline{b}$ et $k = 0, ..., N_\phi - 1$. Nous écrivons également

$$\underline{\phi}_k^{\perp} = \cos\phi_k\,\underline{a} + \sin\phi_k\,\underline{b} \tag{5.48}$$

$$\underline{\theta}_k^{\perp} = -\sin\psi(\phi_k)\,\underline{\alpha} + \cos\psi(\phi_k)\,\underline{\phi}_k \tag{5.49}$$

pour $k = 0, \ldots, (N_\phi - 1)$. De plus, nous considérons que les projections sont connues sur une grille de $N_l \times N_t$ points telle que

$$(l_m, t_n) = (l_0 + m\,\Delta l, t_0 + n\,\Delta t), \quad m = 0, \ldots, (N_l - 1) \text{ et } n = 0, \ldots, (N_t - 1) \tag{5.50}$$

où l_0 et t_0 sont choisis de telle sorte que la grille soit centrée à l'origine du système d'axes (l, t) et où Δl (respectivement Δt) est le pas d'échantillonnage dans la direction $\underline{\phi}^{\perp}$ (respectivement $\underline{\theta}^{\perp}$). La formule (5.11) est alors discrétisée de la manière suivante

$$g(\phi_k, l_m) \simeq \Delta t \sum_{n=0}^{N_t - 1} p_{\mu_0}(\underline{\theta}_k, l_m\underline{\phi}_k^{\perp} + t_n\underline{\theta}_k^{\perp})\, e^{\mu_d(\phi_k)t_n} \tag{5.51}$$

pour $k = 0, \ldots, (N_\phi - 1)$ et $m = 0, \ldots, (N_l - 1)$. Le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $g(\phi, l)$ est donc de l'ordre de $N_\phi N_l N_t$.

Implémentation de l'étape 2

Cette seconde étape consiste à appliquer l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées à $g(\phi_k, l_m)$. Pour obtenir $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$, il est tout d'abord indispensable de filtrer les projections exponentielles de Radon. Nous avons discrétisé la formule (5.22) de la manière suivante

$$g^F(\phi_k, l_m) \simeq \Delta l \sum_{m'=0}^{N_l - 1} k_{\mu_2}(\phi_k, (m - m')\Delta l)\; g(\phi_k, l_{m'}) \tag{5.52}$$

pour $k = 0, \ldots, (N_\phi - 1)$ et $m = 0, \ldots, (N_l - 1)$. Le filtre k_{μ_2} est donné par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_2}](\phi_k, \sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} + \frac{j}{2}\text{sign}(\sigma)\,\mu_2'(\phi_k) & \text{si } |\sigma| \geq |\overline{\mu}_2(\phi_k)| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.53}$$

Étant donné que $k_{\mu_2}(\phi_k, .)$ est définie au sens de la théorie des distributions, nous l'avons régularisée en utilisant une fenêtre d'apodisation :

$$k_{\mu_2}^r(\phi_k, l) = \int_{|\sigma| \leq (1/2\Delta l)} d\sigma\, [\mathcal{F}_1 k_{\mu_2}](\phi_k, \sigma)\; ((1 - \lambda_1) + \lambda_1\, \cos(2\pi\Delta l\,\sigma))\; e^{j2\pi\sigma l} \tag{5.54}$$

où $\lambda_1 \in [0, 0.5]$. Pour $\lambda_1 = 0.5$, nous sommes en présence de la fenêtre d'apodisation de Hanning tandis que si $\lambda_1 = 0$, la fenêtre d'apodisation correspond à une fenêtre rectangulaire.

Une remarque s'impose à présent sur le calcul des échantillons $\mu_2'(\phi_k)$. Connaissant la forme analytique de la fonction $\mu_2(\phi)$, nous avons déterminé l'expression analytique de sa dérivée. Il s'en suit que le calcul des échantillons $\mu_2'(\phi_k)$ est exact.

Après avoir remplacé k_{μ_2} par $k_{\mu_2}^r$ dans (5.52), nous utilisons un algorithme de transformée de Fourier rapide pour calculer la convolution. L'étape de filtrage des projections nécessite ainsi un nombre d'opérations proportionnel à $N_\phi N_l \log N_l$.

Une fois les projections filtrées, la valeur de $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, .)$ en un point $\underline{s}$ est obtenue par rétroprojection selon la formule (5.21) discrétisée de la manière suivante

$$p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s}) \simeq \Delta\phi \sum_{k=0}^{N_\phi - 1} e^{-\mu_2(\phi_k)\underline{s}.\underline{\phi}_k} \, g^F(\phi_k, l = \underline{s}.\underline{\phi}_k^\perp) \tag{5.55}$$

Si la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ est calculée sur une grille de $N_a \times N_b$ pixels, le nombre d'opérations pour la rétroprojection est de l'ordre de $N_a N_b N_\phi$. L'étape 2 du processus de synthèse nécessite donc un nombre d'opérations proportionnel à $N_\phi N_l \log N_l$ et à $N_a N_b N_\phi$.

Donnons à présent une estimation du nombre d'opérations nécessaires pour synthétiser une projection parallèle exponentielle par notre méthode de synthèse. Si on considère que $N_l = N_t = N_a = N_b = M$ et que $N_\phi \simeq M$, le nombre d'opération est alors de l'ordre de M^3.

5.3.2 Reconstructions

Pour tester notre méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles, nous avons utilisé le fantôme 3D décrit à l'annexe C.1. Pour nos simulations, nous avons choisi la direction

$$\underline{\alpha} = (\cos 225^\circ, \sin 225^\circ, 0) \tag{5.56}$$

Nous allons présenter des résultats de synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ pour 3 valeurs de μ_1 ($+\mu_0$, 0 et $-\mu_0$), 2 valeurs de γ (30° et 60°) et 3 positions $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ et $\underline{c}_3$ du centre du cercle correspondant respectivement à $k = 0.1$, $k = 0.5$ et $k = 0.9$:

$$\underline{c}_1 = (\cos(225^\circ + 0.1\,\gamma), \sin(225^\circ + 0.1\,\gamma), 0) \tag{5.57}$$

$$\underline{c}_2 = (\cos(225^\circ + 0.5\,\gamma), \sin(225^\circ + 0.5\,\gamma), 0) \tag{5.58}$$

$$\underline{c}_3 = (\cos(225^\circ + 0.9\,\gamma), \sin(225^\circ + 0.9\,\gamma), 0) \tag{5.59}$$

La figure 5.14 illustre les 6 géométries considérées tandis que la figure 5.15 montre la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ discrétisée de manière idéale sur une grille carrée de 100×100 pixels carrés de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$ pour $\mu_1 = +\mu_0$, 0, $-\mu_0$ avec $\mu_0 =$

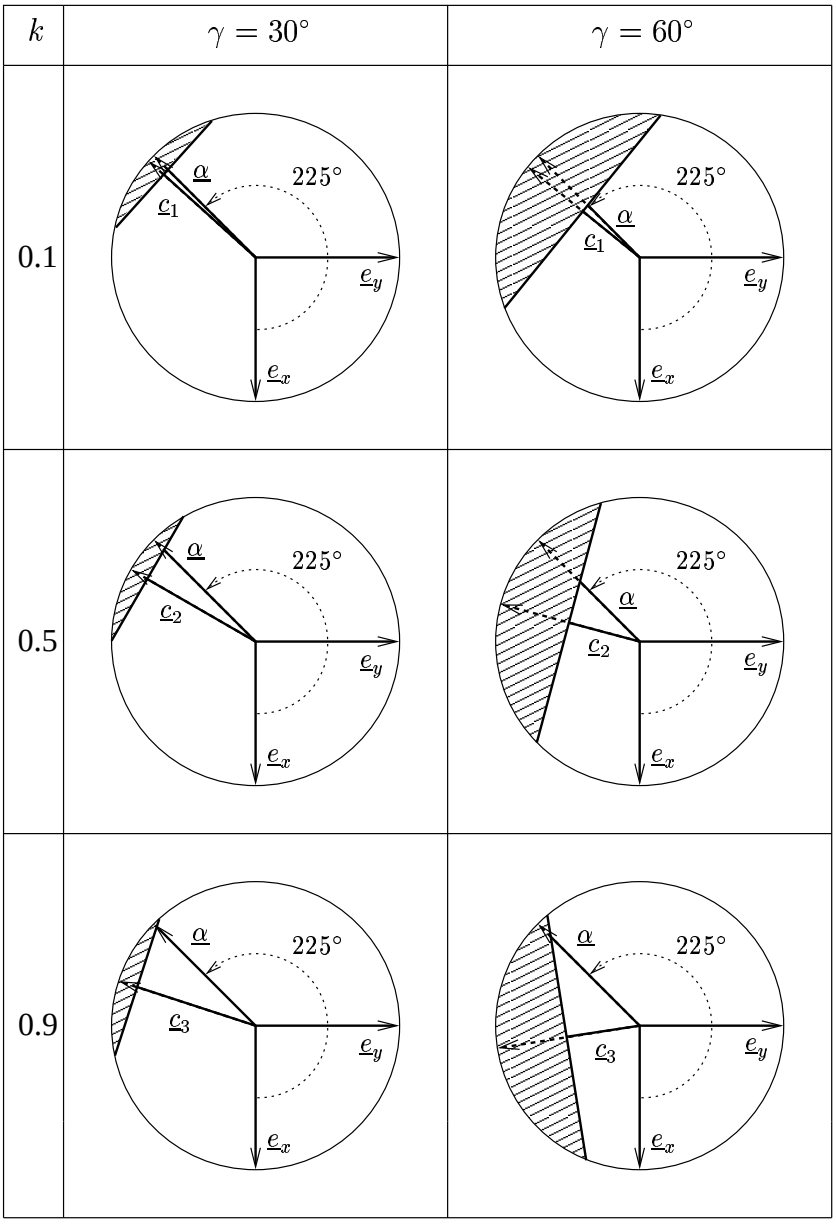


FIG. 5.14 – Illustration des 6 géométries considérées pour le test de la méthode. La zone grise correspond pour chaque cas à la région $I_{C(\underline{c}_i,\gamma)}$, avec $i = 1$, 2 ou 3.

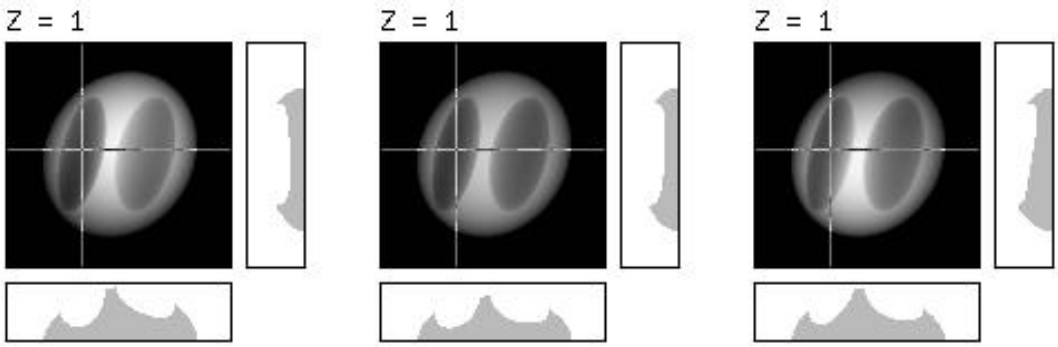


FIG. 5.15 – Projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ discrétisée idéale ($\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$). À gauche : $\mu_1 = +\mu_0$. Au centre : $\mu_1 = 0$. À droite : $\mu_1 = -\mu_0$. L'affichage correspond à une répartition uniforme de niveaux de gris sur l'intervalle $[0, 125]$.

0.02mm^{-1}. Dès lors, 6 (configurations géométriques) $\times$ 3 (valeurs de μ_1) = 18 projections ont été synthétisées et sont présentées ci-après.

Les paramètres relatifs à la simulation des projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sur le cercle sont :

$$N_\phi = 128, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{N_\phi} = 2.8125^\circ \tag{5.60}$$

$$N_l = N_t = 100, \qquad \Delta l = \Delta t = 1.5\text{mm} \tag{5.61}$$

tandis que la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ est reconstruite sur une grille carrée de 100×100 pixels carrés de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$ centrée à l'origine du système d'axes $(\underline{a}, \underline{b})$. Notons que, dans nos simulations, nous avons $\underline{a} = -\underline{e}_z$. Finalement, nous avons utilisé le paramètre $\lambda_1 = 0.5$ pour la fenêtre d'apodisation qui correspond dans ce cas à la fenêtre de Hanning.

Les figures 5.16, 5.17 et 5.18 montrent les résultats de la synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ pour $\mu_1 = +\mu_0$, 0 et $-\mu_0$ respectivement. Ces trois figures sont à mettre en correspondance avec les figures 5.11, 5.12 et 5.13 respectivement.

La figure 5.16 montre que notre méthode de synthèse fournit de très bons résultats lorsque le coefficient d'atténuation μ_1 est égal à celui des projections données, c'est-à-dire lorsque $\mu_1 = \mu_0$. Ce résultat confirme donc bien l'étude théorique que nous avons réalisée pour ce cas.

La figure 5.17 montre que si $\mu_1 = 0$, il est possible d'obtenir des résultats de bonne qualité pour certaines configurations (voir première ligne de la figure). Cependant, pour certaines valeurs des paramètres (dernière ligne de la figure), les résultats

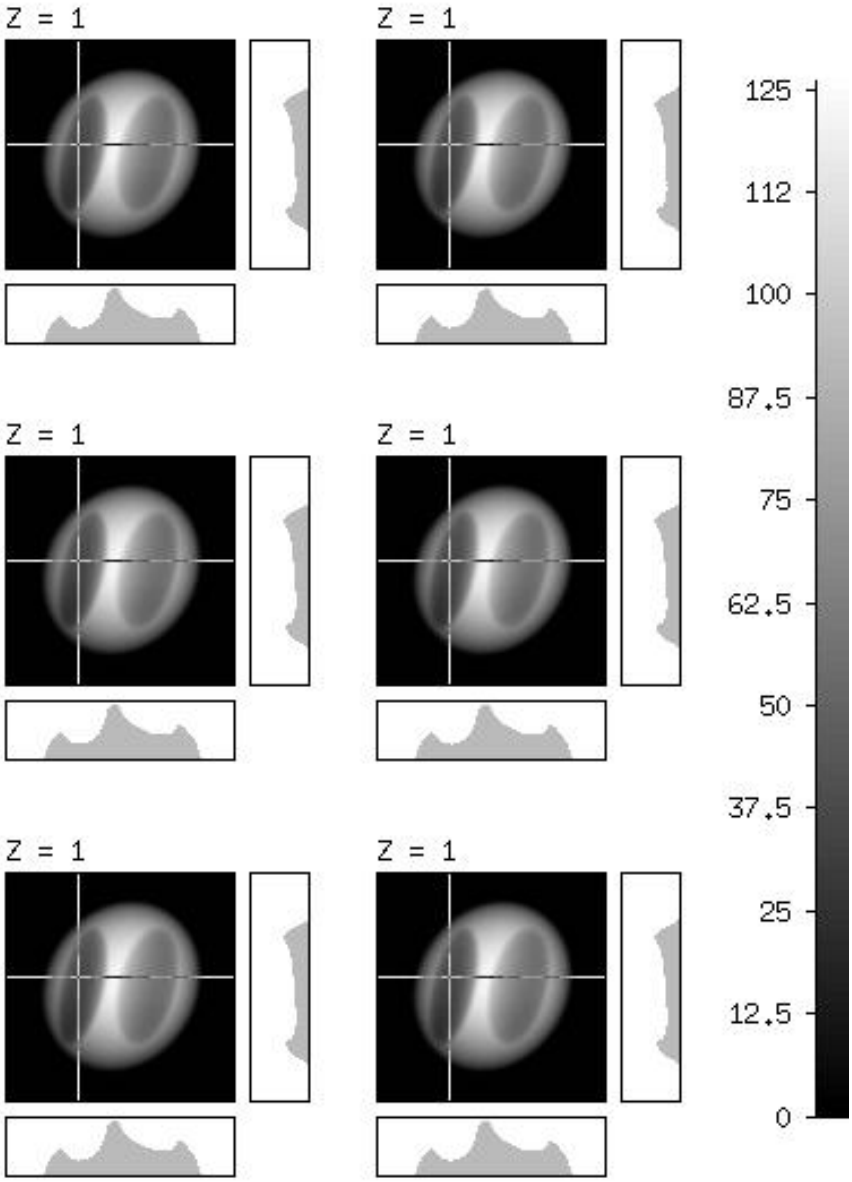


FIG. 5.16 – Synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec $\mu_1 = \mu_0$ ($\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$). 1ère colonne : $\gamma = 30°$. 2ème colonne : $\gamma = 60°$. 1ère ligne : $k = 0.1$. 2ème ligne : $k = 0.5$. 3ème ligne : $k = 0.9$.

de la synthèse sont inacceptables. Nous observons donc que le comportement numérique de la méthode est conditionné par l'allure des fonctions $\mu_2(\phi)$ et $\mu_d(\phi)$ (voir figure 5.12). Dès que les coefficients normalisés $\widehat{\mu}_d(\phi)$ et $\widehat{\mu}_2(\phi)$ dépassent l'unité de plusieurs ordres de grandeur, on observe l'apparition d'artéfacts dans la projection synthétisée.

La figure 5.18 montre que notre méthode de synthèse fournit des résultats peu acceptables lorsque $\mu_1 = -\mu_0$. À nouveau, nous observons que le comportement numérique de la méthode est conditionné par les coefficients $\mu_2(\phi)$ et $\mu_d(\phi)$.

5.3.3 Influence du paramètre N_ϕ

Nous désirons à présent mettre l'accent sur le comportement numérique de notre méthode de synthèse vis-à-vis du nombre N_ϕ de projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ utilisées pour synthétiser la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$. Pour rappel, tous les résultats présentés jusqu'ici correspondaient à $N_\phi = 128$. Dans les résultats présentés ci-après, nous fixons $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma = 30°$ et $k = 0.5$. Tous les paramètres de la simulation restent inchangés sauf le nombre N_ϕ auquel nous attribuons les valeurs $N_\phi = 128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8$ et 4 afin de mettre en évidence l'effet d'une diminution du nombre de projections utilisées pour la synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$.

La figure 5.19 montre les résultats de la synthèse pour ces différentes valeurs du paramètre N_ϕ. Nous observons que pour $N_\phi = 128$ et 64, le résultat de la synthèse est de très bonne qualité. Pour $N_\phi = 32$, nous voyons apparaître quelques artéfacts dans la projection synthétisée. En-dessous de 16 projections, le résultat de la synthèse perd nettement en qualité. Ce phénomène est dû au mauvais comportement numérique de l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées lorsque le nombre N_ϕ de projections exponentielles de Radon devient trop faible par rapport au nombre N_l d'échantillons dans une projection $g(\phi_k, l_m)$. L'intégrale apparaissant dans la rétroprojection est dans ce cas mal discrétisée.

Nous tirons comme enseignement de ces derniers résultats que l'implémentation fournie ci-avant de la méthode de synthèse n'est pas adéquate au traitement d'un nombre limité de projections parallèles exponentielles données sur un cercle. À la section 5.4, nous proposons une variante de l'implémentation de la méthode, variante adaptée au traitement d'un nombre plus faible de projections données sur un cercle.

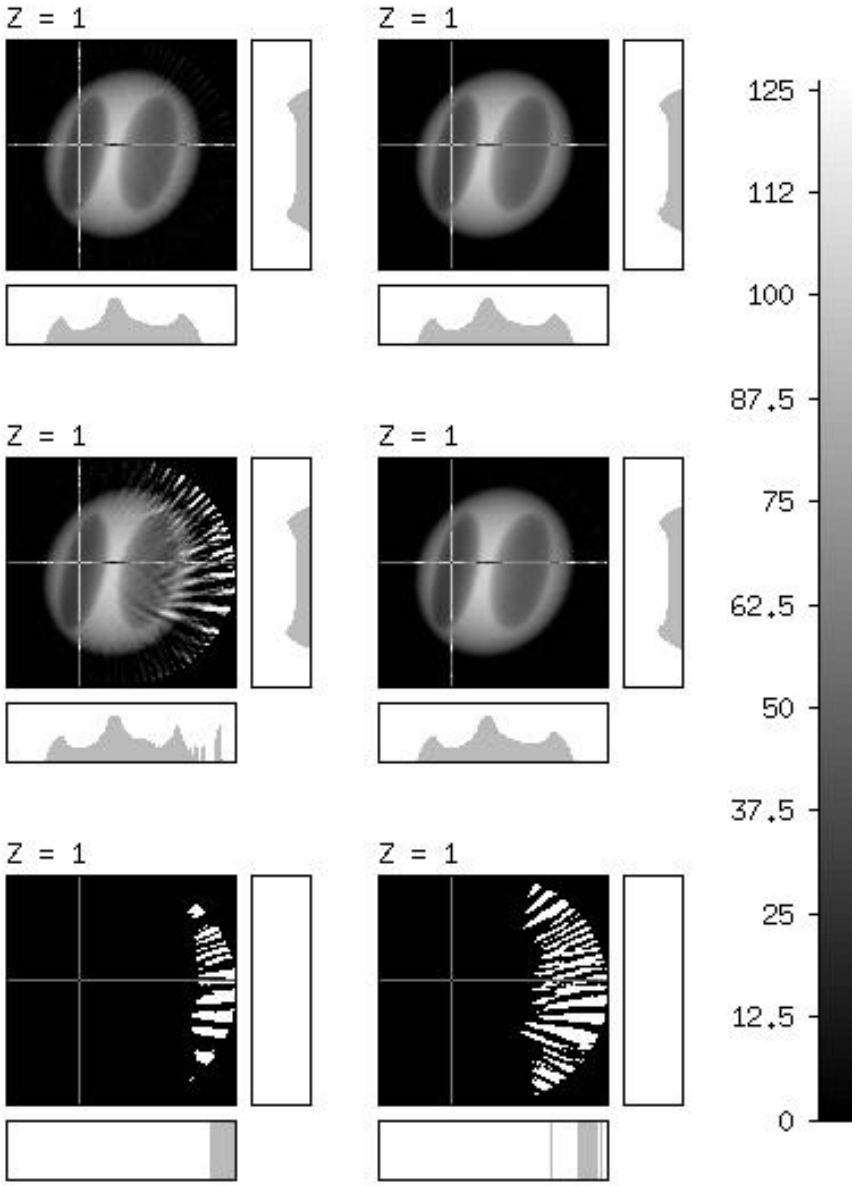


FIG. 5.17 – Synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec $\mu_1 = 0$. 1ère colonne : $\gamma = 30°$. 2ème colonne : $\gamma = 60°$. 1ère ligne : $k = 0.1$. 2ème ligne : $k = 0.5$. 3ème ligne : $k = 0.9$.

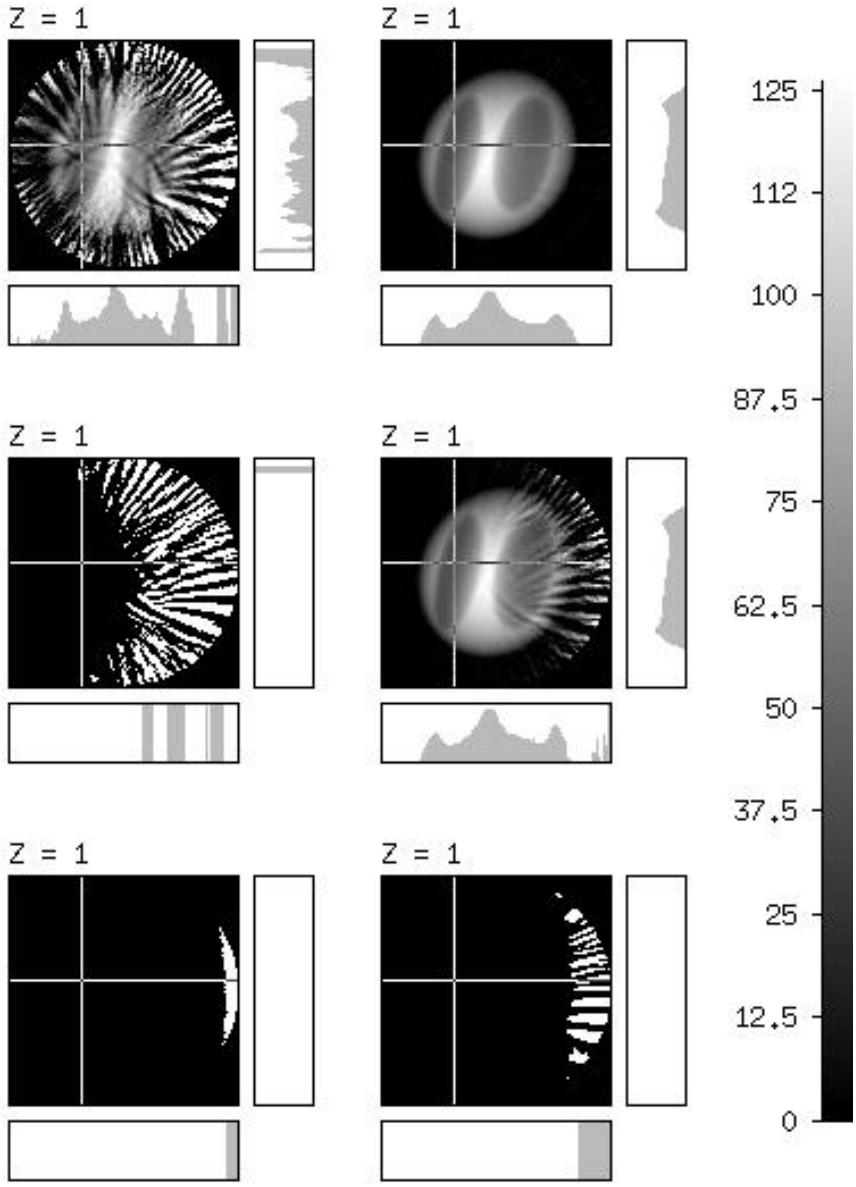


FIG. 5.18 – Synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec $\mu_1 = -\mu_0$ ($\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$). 1ère colonne : $\gamma = 30°$. 2ème colonne : $\gamma = 60°$. 1ère ligne : $k = 0.1$. 2ème ligne : $k = 0.5$. 3ème ligne : $k = 0.9$.

5.3.4 Échantillonnage non-uniforme sur le cercle

Nous désirons à présent insister sur un phénomène apparaissant suite au choix de l'échantillonnage réalisé pour les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ utilisées pour synthétiser la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$. Pour rappel, l'échantillonnage en la variable ϕ était réalisé de manière uniforme afin d'obtenir un échantillonnage uniforme des projections $g(\phi, l)$. Il découle de ce choix que les directions

$$\underline{\theta}_k = \cos\psi(\phi_k)\,\underline{\alpha} + \sin\psi(\phi_k)\,\underline{\phi}_k \tag{5.62}$$

des projections données sont échantillonnées de manière *non-uniforme* sur le cercle. La figure 5.20 illustre ce phénomène. Il est clair qu'en pratique un tel échantillonnage présente un certain inconvénient. Il serait en effet indispensable, lors de l'acquisition des mesures en géométrie RSH, de faire subir au collimateur RSH une rotation dont le pas angulaire change à chaque nouvelle acquisition d'une projection parallèle.

Tirons à présent un bilan sur l'implémentation de la méthode de synthèse que nous avons proposée ci-avant. Elle présente essentiellement deux inconvénients :

- Elle n'est pas adaptée à un nombre restreint de projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ données sur le cercle.
- Elle induit un échantillonnage non-uniforme des directions $\underline{\theta}$ des projections données sur le cercle. De plus, cet échantillonnage dépend du paramètre k et donc de la position du vecteur $\underline{\alpha}$ dans la région délimitée par le cercle.

À la section suivante, nous proposons une variante à l'implémentation précédente qui remédie à ces deux inconvénients. Cette nouvelle implémentation constitue un algorithme original que nous avons appelé *algorithme des directions ordonnées*.

5.4 Algorithme des directions ordonnées

Nous proposons ici une implémentation de la méthode de synthèse des projections parallèles exponentielles prenant en considération les deux points suivants :

- Échantillonnage uniforme des projections parallèles exponentielles données sur le cercle et indépendance de cet échantillonnage vis-à-vis de la position du vecteur $\underline{\alpha}$ dans la région délimitée par le cercle.
- Meilleur comportement numérique vis-à-vis d'un nombre restreint de projections données sur le cercle.

La méthode que nous proposons ici, appelée *algorithme des directions ordonnées*, consiste à ajouter une étape préliminaire aux deux étapes déjà proposées à la section précédente. Notons que cet algorithme est une variante de l'algorithme des points sources ordonnés [55] proposé par F. Noo pour la reconstruction d'images à partir de projections coniques.

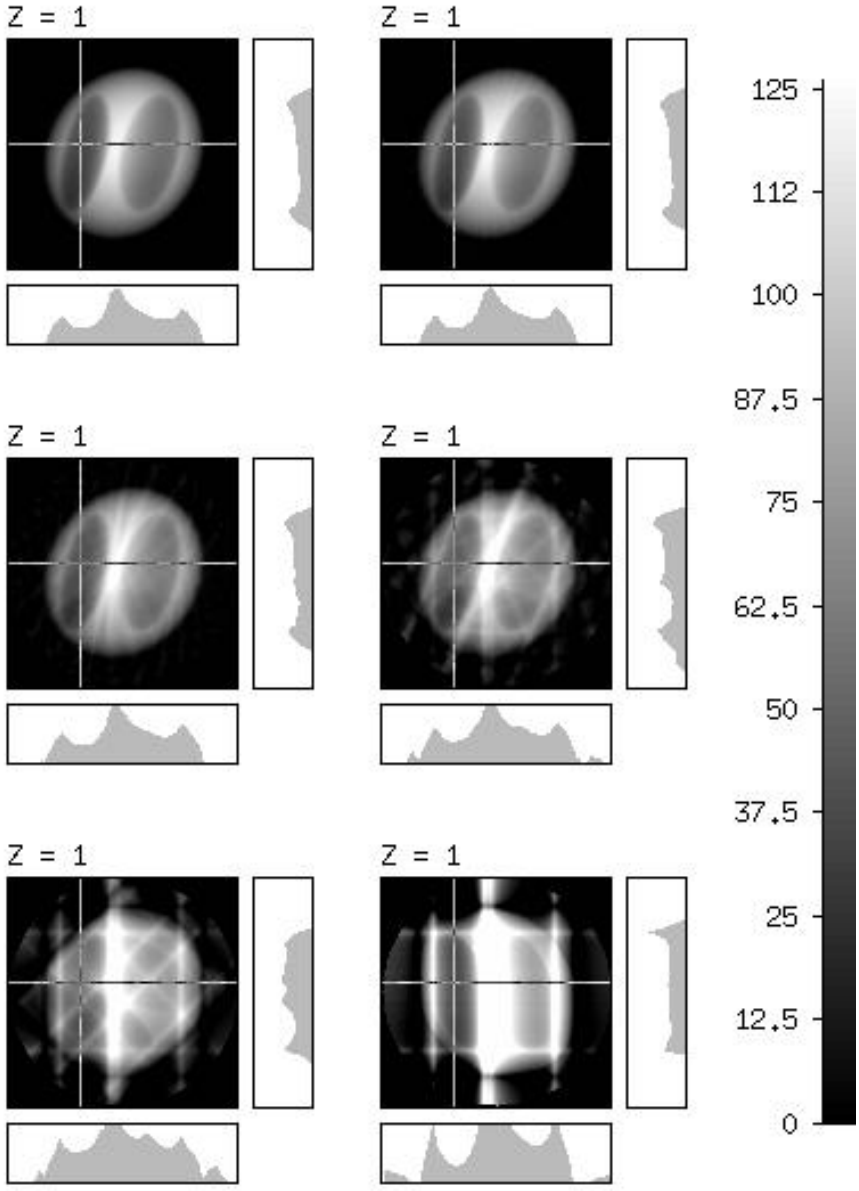


FIG. 5.19 – Synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ avec $\mu_1 = \mu_0$ ($\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$) pour $\gamma = 30°$ et k=0.5. De haut en bas et de gauche à droite : $N_\phi = 128, 64, 32, 16, 8, 4$.

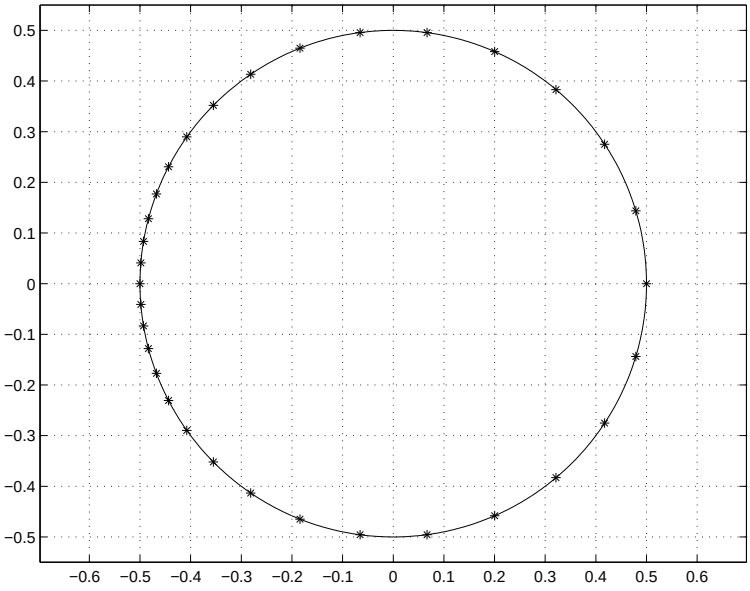


FIG. 5.20 – Échantillonnage non-uniforme sur le cercle. Cette figure montre le plan contenant le cercle ($\gamma = 30°$). Les symboles "*" sur le cercle correspondent à l'extrémité du vecteur $\underline{\theta}_k$ ($k = 0, \ldots, (N_\phi - 1)$) pour $k = 0.6$ et $N_\phi = 32$.

Soit $\underline{\Theta}(\eta)$ un vecteur unitaire appartenant au cercle $C(\underline{c}, \gamma)$, où η est l'abscisse curviligne du point $\underline{\Theta}(\eta)$ sur ce cercle, mesurée par rapport à un point de référence quelconque du cercle. Le paramètre η appartient à l'intervalle $[0, L = 2\pi \sin\gamma[$ où L est le périmètre du cercle. Supposons connues N_{cercle} projections $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}(\eta_i), \underline{s})$ définies par

$$p_{\mu_0}(\underline{\Theta}(\eta_i), \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\Theta}(\eta_i))\, e^{\mu_0 t}, \quad \underline{s}.\underline{\Theta}(\eta_i) = 0 \tag{5.63}$$

où $\eta_i \in [0, L[$ pour tout $i = 0, \ldots, (N_{cercle} - 1)$. Les valeurs η_i sont choisies strictement croissantes de telle sorte que les extrémités des vecteurs $\underline{\Theta}(\eta_i)$ soient ordonnées sur le cercle. Les points $\underline{\Theta}(\eta_i)$ et $\underline{\Theta}(\eta_{i+1})$ forment donc toujours une paire de points voisins l'un de l'autre sur le cercle. Par définition, les points $\underline{\Theta}(\eta_{N_{cercle}-1})$ et $\underline{\Theta}(\eta_0)$ forment une paire de points voisins. Par abus de langage, nous écrirons $\underline{\Theta}_i = \underline{\Theta}(\eta_i)$.

Pour rappel, l'étape 2 de processus de synthèse, présentée à la section précédente, nécessite la connaissance des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour un jeu de directions $\underline{\theta}$ spécifiées par la variable ϕ. Pour une valeur de ϕ fixée par l'échantillonnage (5.45), il est nécessaire de connaître la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ pour $\underline{\theta} = \cos\psi(\phi)\, \underline{\alpha} + \sin\psi(\phi)\, \underline{\phi}$. Cependant, le vecteur $\underline{\theta}$ ne fait peut-être pas partie de l'ensemble des directions $\underline{\Theta}_i$ et la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ est donc inconnue. La méthode que nous proposons est basée sur un schéma d'interpolation estimant la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ à partir des projections données $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s})$. Il doit être clair que cette méthode ne synthétise pas la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ de manière exacte mais en donne une

estimation par interpolation linéaire.

Notre but à présent est d'estimer la projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$, où $\underline{\theta}$ est fixé sur le cercle, à partir du jeu de projections $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s})$. Nous notons η_θ l'abscisse curviligne du point $\underline{\theta}$ sur le cercle. Pour $\underline{s}$ fixé, nous devons estimer la valeur de l'intégrale de ligne

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t} \tag{5.64}$$

L'idée de notre algorithme est d'estimer cette grandeur en l'assimilant à l'intégrale de f (pondérée par l'exponentielle bien sûr) le long de la ligne passant par $\underline{s}$ et de direction $\underline{\Theta}_i$ la plus proche possible de $\underline{\theta}$. Cette dernière valeur correspond à la valeur de la projection $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, .)$ au point $\underline{s} - (\underline{s}.\underline{\Theta}_i)\underline{\Theta}_i$, projection du point $\underline{s}$ sur le plan $\Pi_{\underline{\Theta}_i}$. La figure 5.21 illustre la situation.

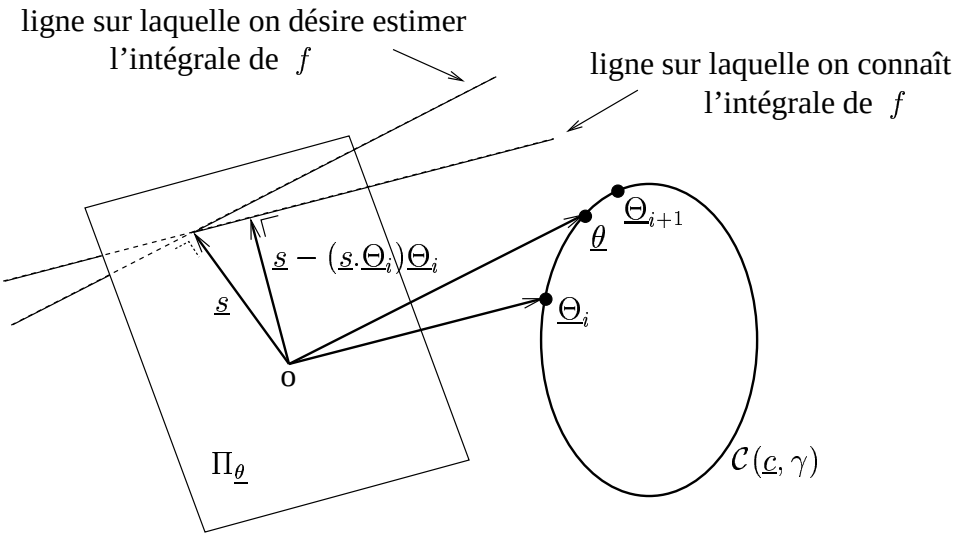


FIG. 5.21 – Approximation de l'intégrale de ligne $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ par la valeur $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s} - (\underline{s}.\underline{\Theta}_i)\underline{\Theta}_i)$.

Afin d'obtenir une meilleure estimation encore, nous utilisons les deux projections données dont les directions sont les plus proches de $\underline{\theta}$, c'est-à-dire celles de directions $\underline{\Theta}_i$ et $\underline{\Theta}_{i+1}$ pour lesquelles $\eta_\theta \in [\eta_i, \eta_{i+1}]$. La valeur de l'intégrale de ligne $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ est alors estimée par la formule d'interpolation linéaire suivante

$$\begin{aligned} p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) \;\simeq\; & \omega(\eta_\theta, \eta_i, \eta_{i+1})\, p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_{i+1}, \underline{s} - (\underline{s}.\underline{\Theta}_{i+1})\underline{\Theta}_{i+1}) \\ & + (1 - \omega(\eta_\theta, \eta_i, \eta_{i+1}))\, p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s} - (\underline{s}.\underline{\Theta}_i)\underline{\Theta}_i) \end{aligned} \tag{5.65}$$

où $\underline{s}.\underline{\theta} = 0$ et où nous avons introduit le facteur de pondération

$$\omega(\eta, \eta_i, \eta_{i+1}) = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \tag{5.66}$$

Cette méthode d'interpolation peut s'appliquer à n'importe quel vecteur $\underline{s}$ du plan $\Pi_{\underline{\theta}}$. La projection $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ peut donc être estimée entièrement. Cette approximation sera d'autant meilleure que le nombre N_{cercle} de projections données est élevé. En effet, les directions $\underline{\Theta}_i$ et $\underline{\Theta}_{i+1}$ vérifiant $\eta_\theta \in [\eta_i, \eta_{i+1}]$ sont alors proches de $\underline{\theta}$.

L'*algorithme des directions ordonnées* pour la synthèse des projections parallèles exponentielles peut finalement se résumer comme suit :

• **Étape 0.** À partir des projections $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s})$ données pour $i = 0, \ldots, (N_{cercle} - 1)$, estimer le jeu de projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}_k, \underline{s})$ pour $k = 0, \ldots, (N_\phi - 1)$ par l'utilisation de la formule (5.65).
• **Étape 1.** idem que l'étape 1 de la section 5.3.1.
• **Étape 2.** idem que l'étape 2 de la section 5.3.1.

5.4.1 Détails d'implémentation

Nous estimons ici le nombre d'opérations nécessaires pour réaliser l'étape préliminaire que nous venons d'introduire. Étant donné qu'il y a N_ϕ projections parallèles exponentielles à calculer par interpolation et que chacune de ces projections comporte $N_l \times N_t$ pixels, le nombre d'opérations nécessaires lors de l'étape préliminaire est proportionnel à $N_\phi N_l N_t$.

De plus, les directions $\underline{\Theta}_i$ pouvant être choisies de manière arbitraire sur le cercle, pour autant qu'elles soient ordonnées, il est judicieux de les échantillonner de manière uniforme. Si le nombre de projections données est égal à N_{cercle}, le pas d'échantillonnage des directions $\underline{\Theta}_i$ sur le cercle est donc égal à $2\pi/N_{cercle}$.

5.4.2 Reconstructions

Pour tester notre algorithme des directions ordonnées, nous considérons le même fantôme que précédemment ainsi que le même vecteur $\underline{\alpha}$. Les projections $p_{\mu_0}(\underline{\Theta}_i, \underline{s})$ sont simulées avec $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$ pour $i = 0, \ldots, (N_{cercle} - 1)$ et échantillonnées sur des grilles carrées de 100×100 pixels de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$. Les paramètres utilisés dans la méthode de synthèse sont les suivants

$$N_\phi = 128,\ N_l = N_t = 100,\ \Delta l = \Delta t = 1.5\text{mm} \tag{5.67}$$

tandis que la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ est synthétisée sur une grille carrée de 100×100 pixels carrés de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$. Le paramètre λ_1 de la fenêtre d'apodisation est choisi égal à $\lambda_1 = 0$, ce qui correspond à une fenêtre d'apodisation rectangulaire. L'étape préliminaire utilise un schéma d'interpolation linéaire ayant pour effet d'atténuer une partie des hautes fréquences présentes dans les données. Il nous a donc semblé inutile d'utiliser en plus une fenêtre de Hanning.

Nous avons testé la méthode pour $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma = 30°$ et $k = 0.5$. De plus, nous considérons plusieurs valeurs de N_{cercle} différentes : $N_{cercle} = 128, 64, 32, 16, 8$ et 4. Pour ces 6 essais, nous avons maintenu le paramètre N_ϕ égal à 128 afin que le nombre de projections exponentielles de Radon $g(\phi_k, l)$ soit suffisant pour assurer une rétro-projection de qualité.

La figure 5.22 montre les résultats de la synthèse. Nous observons que l'algorithme des directions ordonnées fournit des résultats de très bonne qualité même lorsque le nombre N_{cercle} de projections est petit. La figure 5.22 (algorithme des directions ordonnées) est à comparer à la figure 5.19 (sans étape préliminaire). De plus, étant donné qu'il présente l'avantage de pouvoir échantillonner uniformément les projections sur le cercle, l'algorithme des directions ordonnées constitue une implémentation efficace de la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles. Remarquons cependant que le fantôme utilisé pour ces simulations est assez simple. Il serait intéressant de tester la méthode sur un fantôme présentant de petits détails. Dans ces conditions, le schéma d'interpolation utilisé dans l'algorithme des directions ordonnées risque de fournir des résultats de synthèse plus grossiers au voisinage de ces détails.

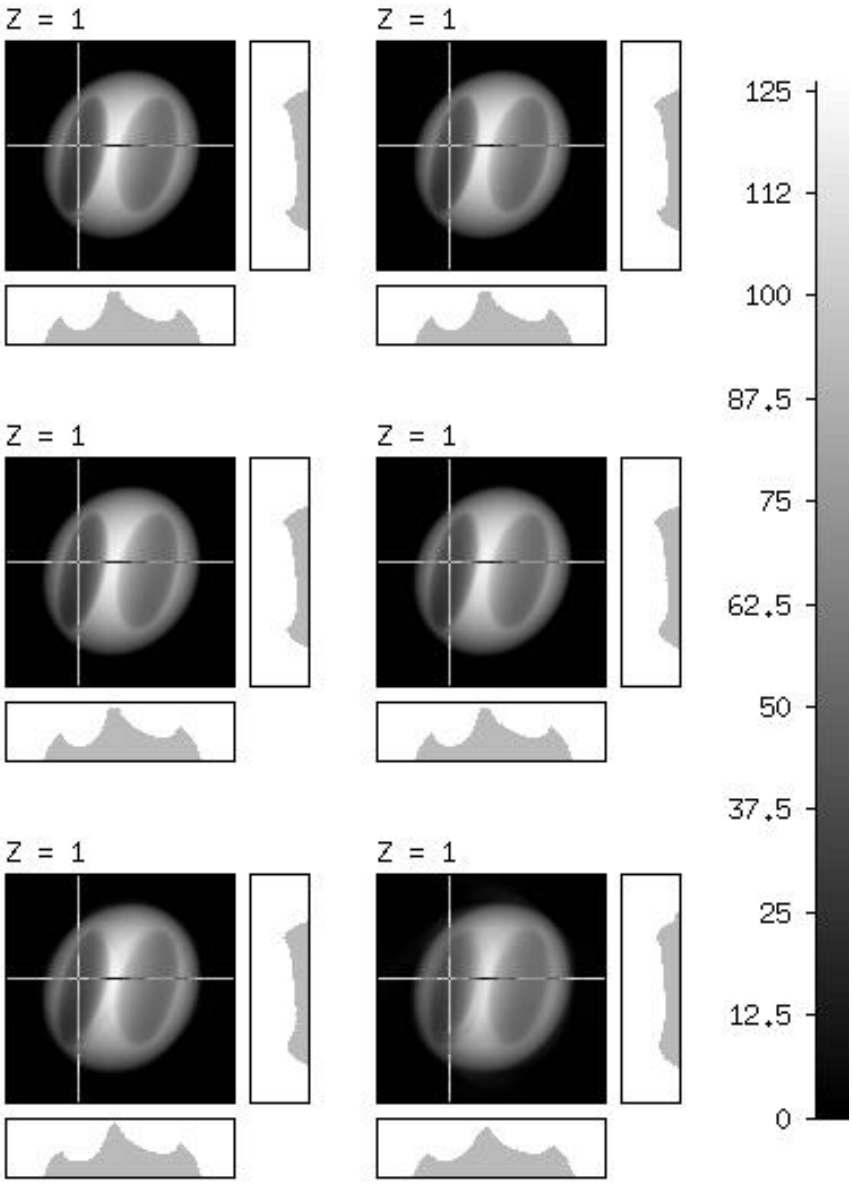


FIG. 5.22 – Synthèse de la projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ pour $\mu_1 = \mu_0$ ($\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$), $\gamma = 30°$ et $k = 0.5$ par l'algorithme des directions ordonnées. De gauche à droite et de haut en bas : $N_{cercle} = 128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4$.

Chapitre 6

Acquisition en géométrie RSH

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la reconstruction d'une fonction tridimensionnelle f à partir d'un ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à un ensemble Ω de directions constitué d'une union finie de cercles sur la sphère unitaire dont les centres sont situés sur un grand cercle (figure 6.1). Ce type d'ensemble définit la géométrie RSH d'acquisition des projections telle que décrite dans [12]. Nous présentons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante qu'un ensemble RSH Ω doit vérifier pour permettre une reconstruction exacte et stable de f. Nous proposons ensuite une méthode générale d'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH et étudions quelques géométries particulières.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont originaux et font, en partie, l'objet d'un article [75] présenté à la conférence "2001 IEEE Medical Imaging Conference".

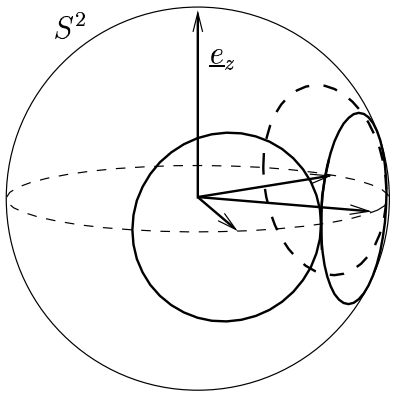


FIG. 6.1 – Illustration de la géométrie RSH. Les centres des cercles de la géométrie appartiennent tous au grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$, $\underline{e}_z$ étant un vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation principal de la géométrie.

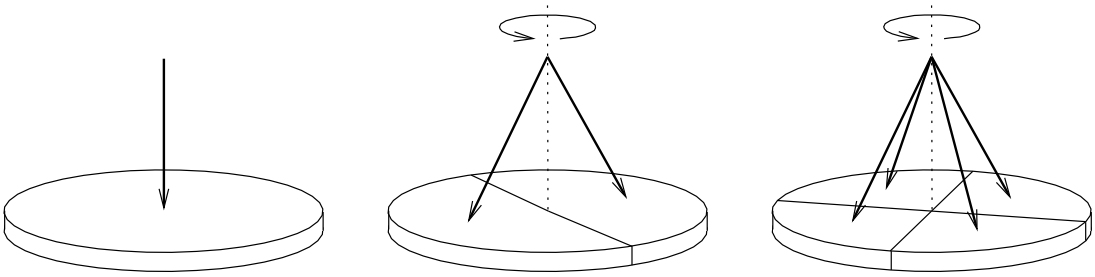
6.1 Motivation

Au chapitre 3, nous avons discuté de l'intérêt de pouvoir inverser la transformée rayons X exponentielle avec atténuation constante μ_0 sur un demi-tour d'acquisition. Un des avantages résultants consiste en la limitation de l'acquisition des mesures aux projections les moins atténuées, c'est-à-dire aux projections les moins bruitées. De plus, cela permet soit de réduire le temps d'un examen, soit de compter un nombre plus important de photons par projection, ce qui augmente le rapport signal sur bruit dans les projections mesurées. Ce processus d'acquisition purement 2D des projections présente toutefois un inconvénient provenant de la faible sensibilité du système composé de la gamma caméra et du collimateur. En effet, l'utilisation d'un collimateur conventionnel à *trous parallèles* limite l'efficacité de la gamma caméra en n'utilisant qu'une faible portion de la surface du détecteur. Lors de l'examen de petits organes tels que le cœur ou le cerveau, un pourcentage relativement important de la surface de la caméra reste inutilisé lors de l'acquisition d'une projection.

L'utilisation du collimateur RSH, déjà introduit au chapitre 1, permet de remédier à cet inconvénient en optimisant la surface utilisée sur le détecteur. Pour rappel, il s'agit d'un collimateur dont l'orientation des trous présente un certain angle avec la normale au collimateur. Cet angle porte le nom d'*angle d'inclinaison* (ou *slant angle* en anglais)[1] et présente des valeurs typiques comprises entre $20°$ et $45°$. Au cours du processus d'acquisition des projections, le détecteur est successivement positionné autour de l'axe du lit du patient. Pour chaque position du détecteur, le collimateur subit une rotation de $360°$ autour de son axe, d'où l'appellation *collimateur rotatif à trous obliques* (ou *Rotating Slant-Hole collimator* en anglais). Par la suite, nous lui préférerons l'appellation collimateur RSH. Ce processus d'acquisition constitue la géométrie RSH d'acquisition des projections. À notre connaissance, il existe deux types de collimateur RSH, celui à 2 segments –parfois appelé collimateur bilatéral ou BSH pour "*Bilateral Slant-Hole* collimator"– et celui à 4 segments –parfois appelé collimateur 4 quadrants ou QSH pour "*Quadrant Slant-Hole* collimator". Un segment est une région du collimateur dans laquelle les trous sont d'orientation identique tandis que deux trous appartenant à des segments différents ont des orientations différentes. La figure 6.2 illustre les directions des trous dans le collimateur à trous parallèles conventionnel et dans les collimateurs RSH à 2 et 4 segments.

Un premier avantage de l'utilisation d'un collimateur RSH est de pouvoir mesurer plusieurs projections simultanément (2 ou 4 selon le type de collimateur utilisé) tout en conservant les avantages d'une acquisition sur un demi-tour. La figure 6.3 illustre un protocole d'acquisition en géométrie RSH pour l'imagerie du cœur. Un autre avantage de l'introduction d'un tel collimateur est la possibilité de modifier un scanner SPECT existant à moindre frais. Il suffit en effet de remplacer le collimateur à trous parallèles

[1] Par abus de langage, nous parlerons de l'angle d'inclinaison du collimateur.



Collimateur à trous parallèles conventionnel | Collimateur RSH à 2 segments | Collimateur RSH à 4 segments

FIG. 6.2 – Collimateurs à trous parallèles conventionnel et RSH. La ligne en pointillé indique l'axe de rotation du collimateur tandis que les vecteurs indiquent l'orientation des trous dans le segment considéré du collimateur.

conventionnel par un collimateur RSH, opération relativement simple à réaliser et peu onéreuse.

La géométrie d'acquisition RSH présente toutefois le désavantage de réduire le volume de la région d'intérêt. Les performances du système sont optimales lorsque l'organe étudié est vu complètement par chaque segment pour toutes les positions possibles du collimateur et du détecteur. L'utilisation d'un collimateur RSH semble donc bien adaptée à l'imagerie de petits organes tels que le cœur ou le cerveau. Le volume 3D de l'espace auquel l'organe est restreint est appelé *volume effectif* (VE). Pour une position fixée du détecteur, l'organe étudié doit se trouver à l'intérieur d'un double cône dont la base coïncide avec le collimateur circulaire (voir figure 6.3). Le volume effectif correspond à l'intersection de tous les doubles cônes déterminés par chaque position du détecteur et peut être assimilé à une sphère. Le volume effectif est sensiblement identique pour un collimateur à 2 ou 4 segments (voir [12]). Les deux dernières colonnes de la table 6.1 (tirée de [12]) donnent la position et le diamètre de la sphère assimilée au volume effectif en fonction de l'angle d'inclinaison γ du collimateur pour une gamma caméra standard de dimensions $40\text{cm} \times 40\text{cm}$.

Les deuxième et troisième colonnes de la table 6.1 fournissent respectivement le nombre de positions et les positions angulaires du détecteur, par rapport à une direction de référence, qui permettent une reconstruction analytique et stable de la carte d'émission lorsque les effets de l'atténuation sont ignorés. Les projections atténuées mesurées sont, dans ce cas, assimilées à des projections parallèles (sans atténuation) et le problème consiste alors à inverser la transformée rayons X en géométrie RSH, problème connu et bien maîtrisé aujourd'hui [12, 21, 76]. On parle de reconstruction sans correction d'atténuation.

Si l'atténuation est prise en considération et qu'on envisage une reconstruction

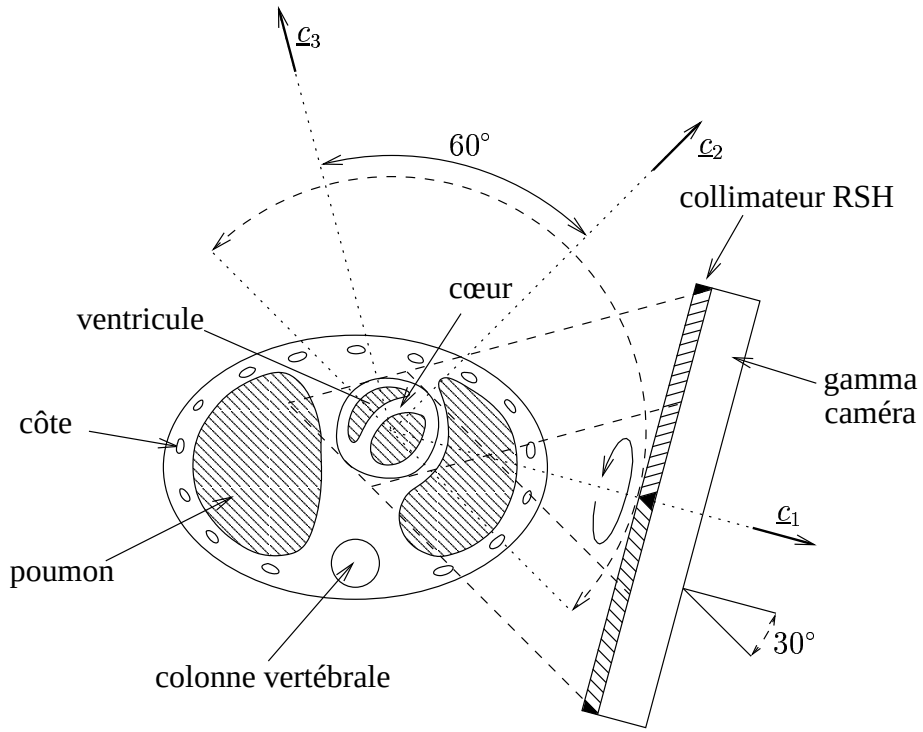


FIG. 6.3 – Illustration de l'acquisition des projections en géométrie RSH. Le détecteur est successivement positionné à trois positions angulaires séparées de $60°$ autour du patient. Ces positions sont caractérisées par les vecteurs unitaires $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ normaux au plan du détecteur. Le collimateur RSH présente un angle d'inclinaison de $30°$ et subit une rotation de $360°$ autour de son axe.

	Positions du détecteur		Volume effectif	
γ	Nombre	Angle $(°)$	Distance VE-collimateur	Diamètre
$\geq 45°$	2	0,90	≤ 10 cm	≤ 14 cm
$30° - 45°$	3	0,60,120	10 - 17 cm	14 - 17 cm
$22,5° - 30°$	4	0,45,90,135	17 - 24 cm	17 - 18 cm
$18° - 22°$	5	0,36,72,108,144	24 - 30 cm	18 - 19 cm
$15° - 18°$	6	0,30,60,90,120,150	30 - 37 cm	19 cm

TAB. 6.1 – Ordres de grandeur en géométrie RSH pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison γ du collimateur. La quatrième colonne correspond à la distance entre le centre du volume effectif (*VE*) et le collimateur.

avec correction d'atténuation analytique, le problème de reconstruction consiste à inverser la transformée rayons X atténuée en géométrie RSH. Cependant, aucune solution exacte à ce problème n'existe à ce jour. Ayant supposé l'atténuation connue et constante sur la région d'émission, les projections atténuées mesurées peuvent être converties en projections parallèles exponentielles et le problème se réduit à inverser la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH, problème qui était non résolu jusqu'à présent. Dans ce chapitre, nous étudions ce problème en détail et proposons une condition nécessaire et suffisante d'inversion. Nous donnons également une méthode générale d'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH. Finalement, il est montré que la table 6.1 reste valable quand on envisage une reconstruction de la carte d'émission avec correction d'atténuation analytique.

6.2 Définition de la géométrie RSH

Nous nous intéressons au problème de la reconstruction d'une fonction tridimensionnelle f à partir d'un ensemble de projections parallèles exponentielles

$$p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt\, f(\underline{s} + t\underline{\theta})\, e^{\mu_0 t}, \qquad \underline{s}.\underline{\theta} = 0 \tag{6.1}$$

connues pour $\underline{\theta} \in \Omega$. L'ensemble Ω contient toutes les directions de S^2 correspondant aux différentes orientations des trous du collimateur RSH pour toutes les positions du détecteur et du collimateur. Nous supposerons N positions de la gamma caméra déterminées par les vecteurs unitaires $\underline{c}_i$ ($i = 1, \ldots, N$) perpendiculaires au plan du détecteur. Pour une position fixée $\underline{c}_i$ du détecteur, le collimateur effectue une rotation de $360°$ autour de son axe de rotation. Le vecteur $\underline{\theta}$, caractérisant la direction des photons au travers du collimateur, trace alors sur la sphère unitaire un cercle de centre $\underline{c}_i$ et d'ouverture angulaire 2γ, où γ est l'angle d'inclinaison du collimateur utilisé. Si on suppose que le même collimateur est utilisé pour chaque position du détecteur, l'ensemble Ω est constitué de l'union des N cercles de centre $\underline{c}_i$ et d'ouverture angulaire 2γ :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} C(\underline{c}_i, \gamma) \tag{6.2}$$

Nous nous limiterons au cas particulier où les N vecteurs unitaires $\underline{c}_i$ appartiennent tous au grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ de S^2. Le vecteur unitaire $\underline{e}_z$ indique la direction de l'axe de rotation du détecteur autour de la table d'examen. La figure 6.4 illustre un exemple d'ensemble Ω considéré.

Nous définissons le problème de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH par celui de la reconstruction analytique, exacte et stable de f à partir d'un ensemble de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour

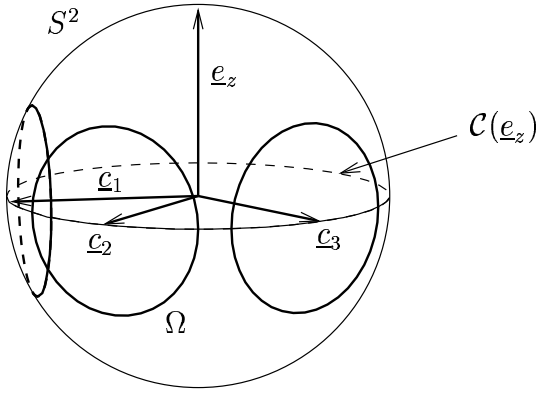


FIG. 6.4 – Illustration d'un ensemble Ω en géométrie RSH pour $N = 3$.

tout vecteur $\underline{\theta}$ appartenant à l'ensemble Ω qui est tel que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N} C(\underline{c}_i, \gamma), \qquad \underline{c}_i.\underline{e}_z = 0\,(i = 1, ..., N) \tag{6.3}$$

où N, γ et $\underline{c}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ sont les paramètres dont va dépendre la méthode d'inversion. Si un ensemble Ω de S^2 peut être défini par une relation de la forme (6.3), nous dirons qu'il est *du type RSH*.

Nous définissons finalement l'*intérieur convexe d'un ensemble RSH* Ω :

$$I^c_\Omega = \bigcup_{i=0}^{N} I^c_{C(\underline{c}_i,\gamma)} \tag{6.4}$$

Il s'agit simplement du sous-ensemble de S^2 correspondant à l'union des intérieurs convexes des différents cercles de Ω. Notons que l'ensemble I^c_Ω est ouvert, car ne contenant pas sa frontière.

6.3 Algorithme de reconstruction

Dans cette section, nous proposons une condition nécessaire et suffisante (CNS) d'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH. Ensuite, pour tout ensemble de projections parallèles exponentielles vérifiant notre CNS, nous proposons une méthode analytique générale d'inversion exacte et stable.

Des résultats présentés au chapitre 5, nous déduisons que la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles permet de synthétiser n'importe quelle projection $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ dont la direction $\underline{\alpha}$ appartient à l'ensemble I^c_Ω. Le principe de l'algorithme de reconstruction en géométrie RSH est de synthétiser un ensemble de projections

$p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ correspondant à une géométrie d'acquisition 2D ou plutôt "pseudo-3D"[2]. La reconstruction de f est obtenue en utilisant les projections synthétisées dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" (section 2.4.3), c'est-à-dire en considérant f comme un empilement de tranches 2D reconstruites chacune par une technique purement 2D. La CNS présentée ci-après exprime sous quelles conditions une telle reconstruction est possible.

6.3.1 Condition nécessaire et suffisante d'inversion

Notre condition nécessaire et suffisante s'énonce comme suit :

> *La reconstruction analytique d'une fonction f à partir de sa transformée rayons X exponentielle $[\mathcal{X}_{\mu_0} f](\underline{\theta}, \underline{s})$ connue pour tout vecteur $\underline{\theta} \in \Omega$, où Ω est un ensemble du type RSH, est possible de manière exacte et stable pour tout μ_0 si et seulement si tout grand cercle de la sphère unitaire rencontre Ω.*

Cette condition est donc identique à la condition nécessaire et suffisante introduite par Orlov [59] pour l'inversion de la transformée rayons X.

Soit Ω un ensemble du type RSH constitué de N cercles de centre $\underline{c}_i$ et d'ouverture angulaire 2γ.

La condition est nécessaire. Raisonnons par l'absurde et supposons que certains grands cercles de S^2 ne rencontrent pas Ω. La condition d'Orlov affirme qu'il est impossible d'inverser de manière stable la transformée rayons X pour cet ensemble Ω de directions. La transformée rayons X ($\mu_0 = 0$) étant un cas particulier de la transformée rayons X exponentielle, il est donc impossible d'inverser cette dernière pour l'ensemble Ω en question. ■

La condition est suffisante. La méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles permet de synthétiser n'importe quelle projection parallèle exponentielle $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ dont la direction $\underline{\alpha}$ appartient à I_Ω^c. Pour qu'une reconstruction de f soit possible, il suffit donc que, pour l'ensemble $(\Omega \cup I_\Omega^c)$ ou un de ses sous-ensembles, il existe une formule d'inversion de la transformée rayons X exponentielle. En particulier, nous montrons ci-après que si tout grand cercle rencontre Ω, alors il est possible de synthétiser un ensemble de projections parallèles exponentielles dont les directions $\underline{\alpha}$ appartiennent à un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ pour lequel une reconstruction exacte et stable de f est possible.

[2] c'est-à-dire correspondant à un ensemble de directions se réduisant à un sous-ensemble d'un grand cercle de la sphère unitaire.

Supposons que tous les grands cercles de S^2 rencontrent Ω. En particulier, tous les grands cercles passant par le point $\underline{e}_z$ rencontrent Ω. Soient $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}^\perp$ deux vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux appartenant au grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ et repérés par un angle $\varphi \in [0, \pi[$ mesuré par rapport à une direction arbitraire de ce même grand cercle. Voir figure 6.5a (à gauche). Vu que tous les grands cercles passant par le point $\underline{e}_z$ rencontrent Ω, le vecteur $\underline{\alpha}$ ou le vecteur $-\underline{\alpha}$ se trouve(nt) soit sur Ω, soit sur I_Ω^c, pour tout $\varphi \in [0, \pi[$. Considérons ces quatre cas séparément. Pour tout $\varphi \in [0, \pi[$:

- Si $\underline{\alpha}(\varphi) \in I_\Omega^c$, il est possible de synthétiser la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = \mu_0$.

- Si $\underline{\alpha}(\varphi) \in \Omega$, la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = \mu_0$ est connue car faisant partie des données du problème.

- Si $-\underline{\alpha}(\varphi) \in I_\Omega^c$, il est possible de synthétiser la projection $p_{\mu_0}(-\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$, c'est-à-dire la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = -\mu_0$.

- Si $-\underline{\alpha}(\varphi) \in \Omega$, la projection $p_{\mu_0}(-\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$, c'est-à-dire $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = -\mu_0$, est connue car faisant partie des données du problème.

Dès lors, dans tous les cas, il est possible de déterminer la projection parallèle exponentielle $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = \pm\mu_0$ pour tout $\varphi \in [0, \pi[$. Vu que le nombre N de cercles composant Ω est fini, il est toujours possible de trouver une fonction $\mu_1(\varphi)$ présentant un nombre fini de discontinuités sur $]0, \pi[$. La reconstruction de f est possible en utilisant les projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" (section 2.4.3) incluant la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle décrite à la section 3.2. ■

La figure 6.5a montre un exemple d'ensemble RSH vérifiant notre CNS ainsi que la fonction $\mu_1(\varphi)$ correspondante. Il est à noter que la fonction $\mu_1(\varphi)$ peut ne pas être unique car plusieurs des quatre cas décrits dans la démonstration peuvent se réaliser simultanément. Ceci reflète la redondance présente dans les données. La figure 6.5b montre un cas où notre CNS n'est pas satisfaite. Sur cette figure, certains grands cercles passant par $\underline{e}_z$ ne rencontrent pas Ω. On observe que, pour certaines valeurs de φ, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ n'appartient ni à Ω, ni à I_Ω^c. La projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ ne peut donc être déterminée.

La condition nécessaire et suffisante que nous venons d'introduire assure que les ensembles du type RSH vérifiant la condition d'Orlov (et donc notre CNS) permettent une reconstruction exacte et stable de la fonction f à partir de sa transformée rayons X exponentielle. La table 6.1 reste donc tout à fait valable pour une reconstruction exacte de la carte d'émission avec correction d'atténuation analytique en géométrie RSH.

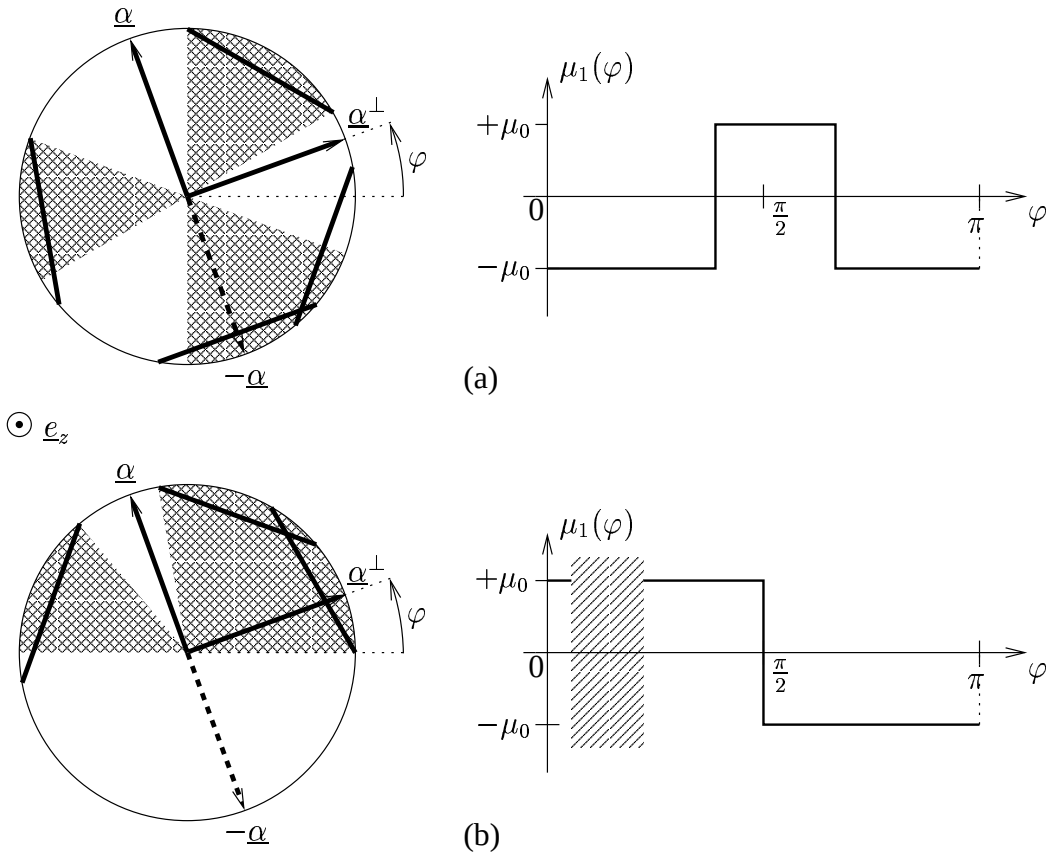


FIG. 6.5 – Illustration de la condition suffisante d'inversion. Le vecteur $\underline{e}_z$ est perpendiculaire au plan de la figure. Sur la partie gauche, les zones hachurées indiquent les directions pour lesquelles la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles est utilisée avec $\mu_1 = \mu_0$. (a) Condition satisfaite. (b) Condition non satisfaite ; la zone hachurée sur le graphe de la fonction $\mu_1(\varphi)$ indique les valeurs de φ pour lesquelles il est impossible de déterminer la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$.

6.3.2 Méthode d'inversion

Soit un ensemble de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues sur un ensemble Ω du type RSH vérifiant notre condition nécessaire et suffisante. Nous donnons à présent une méthode analytique générale de reconstruction de f à partir des projections données. Cette méthode découle de la démonstration de notre CNS. Elle consiste en deux étapes :

1. À partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour $\underline{\theta} \in \Omega$, synthétiser un ensemble de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour $\varphi \in [0, \pi[$, où $\underline{\alpha}(\varphi)$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ et où le coefficient d'atténuation $\mu_1(\varphi)$ est une fonction constante et égale à $\pm\mu_0$ par morceaux, et ne présentant qu'un nombre fini de discontinuités sur $]0, \pi[$.
2. Reconstruire f en utilisant les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1}(\underline{\alpha}, \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" (section 2.4.3) incluant la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle (série de Neumann, chapitre 3).

Dans la deuxième étape de la reconstruction, l'image f est vue comme un empilement de tranches parallèles entre elles et perpendiculaires au vecteur $\underline{e}_z$. Chacune de ces tranches est notée $f_z(x, y)$ où l'indice z indique sa distance signée par rapport à l'origine du système d'axes (x, y, z). Pour chaque valeur de z, la fonction bidimensionnelle $f_z(x, y)$ est considérée comme une image 2D que l'on reconstruit par inversion de sa transformée de Radon exponentielle $[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z]$.

6.4 Géométries RSH particulières

Dans cette section, nous étudions trois géométries RSH particulières. Ces trois géométries correspondent à

- N cercles couvrant $360°$
- N cercles couvrant $180°$
- N cercles couvrant $(180 + \Delta)°$

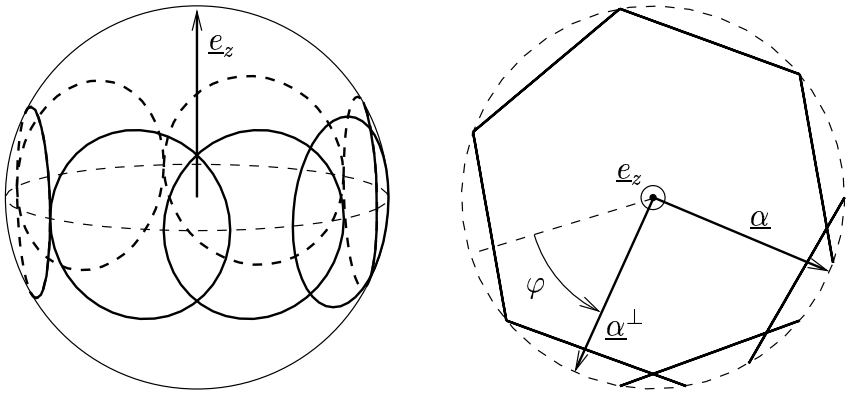
Pour chacune de ces géométries, la méthode générale d'inversion présentée ci-avant peut être particularisée et peut, dans certains cas, déboucher sur une méthode de reconstruction n'utilisant que des techniques 2D du type rétroprojection des projections filtrées, techniques dont l'implémentation est relativement simple. Nous explicitons alors la forme de la fonction $\mu_1(\varphi)$ ainsi que la méthode d'inversion utilisée pour reconstruire chaque tranche $f_z(x, y)$.

6.4.1 N cercles couvrant $360°$

La première géométrie particulière que nous proposons d'étudier est celle pour laquelle l'ensemble Ω est tel que les N cercles le constituant *couvrent entièrement* le

grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$. La figure 6.6 illustre un tel ensemble Ω. Plus clairement, nous dirons qu'un ensemble RSH Ω couvre entièrement $360°$ si l'ensemble $\Omega \cup I_\Omega^c$ contient le grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$.

Pour tout vecteur $\underline{\alpha}$ appartenant à $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$, repéré par un angle φ mesuré par rapport à une direction arbitraire de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$, il est alors possible de déterminer la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = \mu_0$ pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$, soit par synthèse, soit parce qu'elle fait partie des données du problème.



Vue en perspective Vue en plan

FIG. 6.6 – Illustration d'un ensemble RSH couvrant entièrement $360°$: $N = 7$, $\gamma = 30°$. $\underline{\alpha}^\perp$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ perpendiculaire à $\underline{\alpha}$.

Pour un ensemble RSH Ω couvrant entièrement $360°$, nous proposons la méthode de reconstruction suivante qui se résume en deux étapes :

1. À partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ données pour $\underline{\theta} \in \Omega$, synthétiser les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$.
2. Reconstruire f en utilisant les projections $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" incluant la **formule FBP** d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec **atténuation constante** μ_0 sur $360°$ (section 2.2.3). Pour rappel, cette formule d'inversion nécessite la connaissance des projections exponentielles de Radon sur un tour complet, ce qui est bien le cas ici.

Cette méthode d'inversion particulière présente l'avantage de n'utiliser que des techniques du type rétroprojection des projections filtrées. Elle présente cependant l'inconvénient de nécessiter l'acquisition des projections sur un tour complet autour du lit du patient, perdant ainsi tous les avantages d'une acquisition sur un demi-tour.

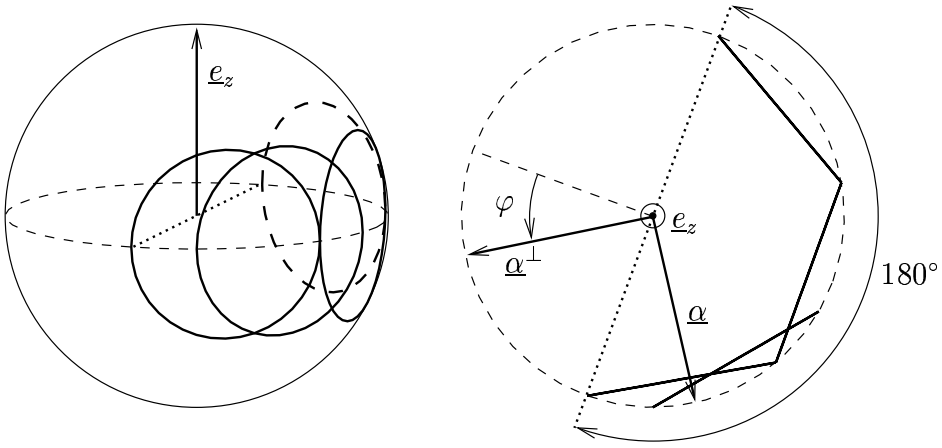
6.4.2 N cercles couvrant $180°$

La géométrie que nous étudions à présent correspond à la situation où les N cercles de Ω *couvrent exactement* un demi grand cercle de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$. La figure 6.7 illustre un tel ensemble Ω.

Plus clairement, nous dirons qu'un ensemble RSH Ω couvre exactement $180°$ si, pour tout vecteur $\underline{\alpha}$ de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ repéré par un angle φ par rapport à une direction arbitraire de référence de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$, il est possible de choisir cette direction de référence de telle sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées simultanément :

- Pour tout $\varphi \in [0, \pi]$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ se trouve soit sur Ω, soit sur I_Ω^c.
- Pour tout $\varphi \in]\pi, 2\pi[$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ n'appartient ni à Ω, ni à I_Ω^c.

Ainsi, pour tout $\varphi \in [0, \pi[$, il est possible de déterminer la projection $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$, soit par synthèse, soit parce qu'elle fait partie des données du problème.



Vue en perspective Vue en plan

FIG. 6.7 – Illustration d'un ensemble RSH couvrant exactement $180°$: $N = 4$, $\gamma = 30°$. $\underline{\alpha}^\perp$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ perpendiculaire à $\underline{\alpha}$.

Pour un ensemble RSH Ω couvrant exactement $180°$, nous proposons la méthode de reconstruction suivante qui se résume en deux étapes :

1. À partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ données pour $\underline{\theta} \in \Omega$, synthétiser les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour tout $\varphi \in [0, \pi[$.
2. Reconstruire f en utilisant les projections $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" incluant la formule d'inversion de la transformée de

Radon exponentielle avec **atténuation constante** μ_0 sur $180°$ **(série de Neumann)** (cf. chapitre 3).

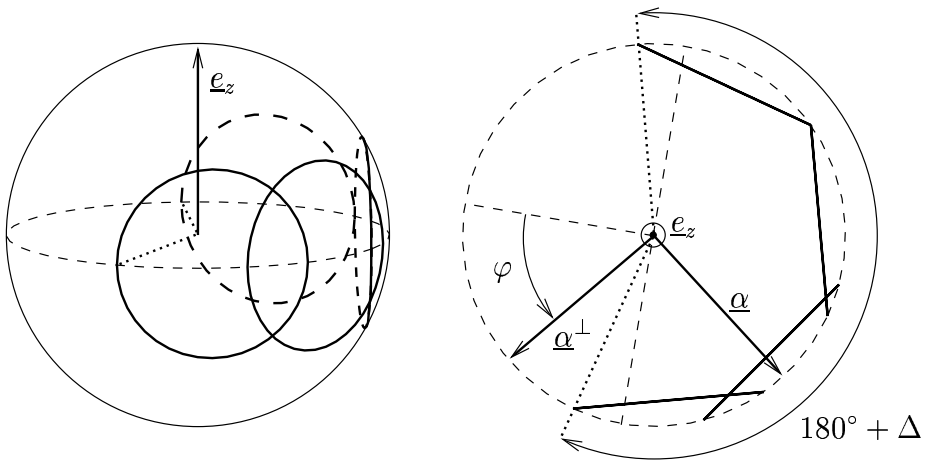
Par rapport à la géométrie RSH correspondant à N cercles sur $360°$, la géométrie décrite dans cette section présente les avantages d'une acquisition sur un demi-tour. Cependant, l'utilisation de la série de Neumann dans la seconde étape de la reconstruction demande un effort d'implémentation plus important.

6.4.3 N cercles couvrant $(180 + \Delta)°$

La géométrie RSH particulière étudiée dans cette section constitue une géométrie intermédiaire entre les deux géométries précédentes. Elle correspond au cas où les N cercles de Ω couvrent un demi-cercle de la sphère unitaire allongé d'un arc de cercle d'ouverture angulaire Δ. La figure 6.8 illustre un tel ensemble Ω.

Plus clairement, nous dirons qu'un ensemble RSH Ω couvre $(180 + \Delta)°$ si, pour tout vecteur $\underline{\alpha}$ de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ repéré par un angle φ par rapport à une direction arbitraire de référence de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$, il est possible de choisir cette direction de référence de telle sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées simultanément :

- Pour tout $\varphi \in [-\frac{\Delta}{2}, \pi + \frac{\Delta}{2}]$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ se trouve soit sur Ω, soit sur I_Ω^c.
- Pour tout $\varphi \in]\pi + \frac{\Delta}{2}, 2\pi - \frac{\Delta}{2}[$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ n'appartient ni à Ω, ni à I_Ω^c.



Vue en perspective Vue en plan

FIG. 6.8 – Illustration d'un ensemble RSH couvrant $(180° + \Delta)$: $N = 4$, $\gamma = 30°$, $\Delta = 30°$. $\underline{\alpha}^\perp$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$ perpendiculaire à $\underline{\alpha}$.

Pour ce type d'ensemble RSH, deux méthodes de reconstruction différentes peuvent être envisagées. La première consiste à synthétiser un jeu de projections parallèles ex-

ponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec $\mu_1(\varphi) = \mu_0$ pour $\varphi \in [0, \pi[$ à partir des projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ données sur Ω. On se retrouve ainsi dans les conditions de la section 6.4.2. La reconstruction de f est obtenue en utilisant les projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" incluant la formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur $180°$ (série de Neumann, chapitre 3). Décrivons à présent la seconde méthode de reconstruction envisagée pour cette géométrie.

L'idée à la base de la méthode de reconstruction décrite ci-après consiste à utiliser la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles pour synthétiser des projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dont le coefficient d'atténuation $\mu_1(\varphi)$ est différent de μ_0 pour certaines valeurs de φ et telles qu'il soit possible d'utiliser une **méthode FBP 2D** sur $180°$ pour reconstruire chaque tranche f_z perpendiculaire à $\underline{e}_z$.

Supposons qu'il soit possible de choisir la direction de référence de φ de telle sorte qu'il existe une valeur de $\epsilon \in]0, \pi/2[$ telle que pour tout $\varphi \in [0, \epsilon[\cup]\pi - \epsilon, \pi]$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ **se trouve sur** I_Ω^c **et non sur** Ω. Dès lors, pour $\varphi \in [0, \epsilon[\cup]\pi - \epsilon, \pi]$, il est possible de synthétiser[3] les projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ avec

$$\mu_1(\varphi) = \begin{cases} \mu_0 \varphi/\epsilon & \text{si } \varphi \in [0, \epsilon[\\ \mu_0(\pi - \varphi)/\epsilon & \text{si } \varphi \in [\pi - \epsilon, \pi[\end{cases} \tag{6.5}$$

à partir des projections parallèles exponentielles données pour $\underline{\theta} \in \Omega$. Pour $\varphi \in [\epsilon, \pi - \epsilon]$, le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ se trouve

- soit sur I_Ω^c et il est donc possible de synthétiser la projection $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$,
- soit sur Ω et la projection $p_{\mu_0}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ est connue car faisant partie des données du problème.

En conclusion, il est possible de déterminer, à partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour $\underline{\theta} \in \Omega$, les projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour tout $\varphi \in [0, \pi[$ dont le coefficient atténuation est la fonction trapèze suivante (voir section 2.2.3) :

$$\mu_1(\varphi) = \mu_0 T_\epsilon(\varphi) \tag{6.6}$$

où ϵ est un paramètre fixé dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. La figure 6.9 illustre la situation.

Pour un ensemble RSH Ω couvrant $(180 + \Delta)°$, nous proposons la méthode de reconstruction suivante qui se résume en trois étapes :

1. Déterminer la direction de référence et le paramètre $\epsilon \in]0, \pi/2[$ tels que le vecteur $\underline{\alpha}(\varphi)$ appartienne à I_Ω^c pour tout $\varphi \in [0, \epsilon[\cup]\pi - \epsilon, \pi]$, l'angle φ étant mesuré par rapport à cette direction de référence. Il est important de remarquer que cette étape est nécessaire. S'il est impossible de déterminer une direction de référence

[3] Pour rappel, la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles ne peut pas être utilisée lorsque la direction $\underline{\alpha}$ de la projection à synthétiser se trouve sur la trajectoire Ω.

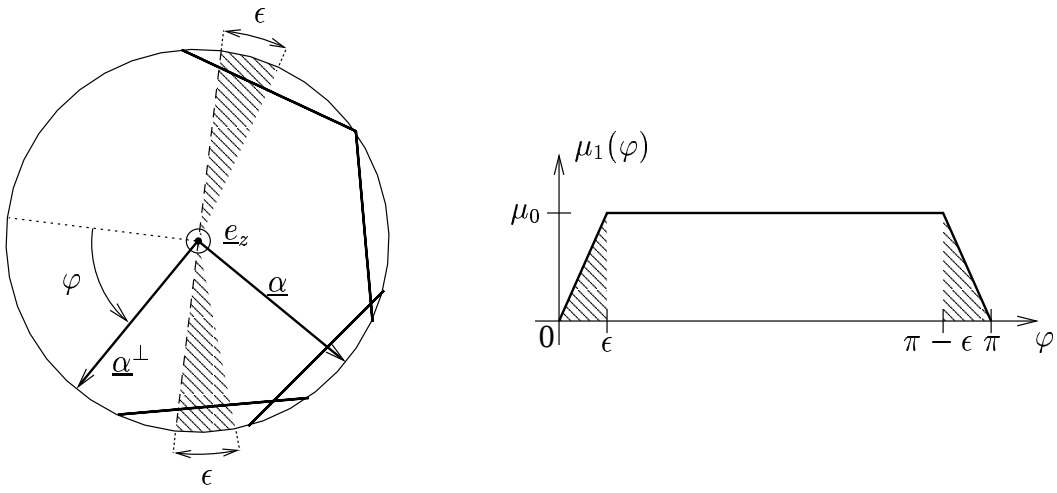


FIG. 6.9 – Synthèse des projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour un ensemble RSH couvrant $(180° + \Delta)$. Les zones hachurées indiquent les directions des projections synthétisées dont le coefficient d'atténuation $\mu_1(\varphi)$ est différent de μ_0 : $N = 4$, $\gamma = 30°$, $\Delta = 30°$, $\epsilon = 18°$.

et un paramètre ϵ respectant cette condition, la méthode décrite ici ne peut être appliquée.

2. À partir des projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ connues pour $\underline{\theta} \in \Omega$, synthétiser les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour tout $\varphi \in [0, \pi[$ où le coefficient d'atténuation $\mu_1(\varphi)$ est donné par (6.6).
3. Reconstruire f en utilisant les projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" incluant la **formule FBP** permettant d'inverser la transformée de Radon exponentielle avec **atténuation dépendant de l'angle** (**anti-symétrique par rapport à** π) sur $180°$ (section 2.2.3).

Cette méthode de reconstruction présente les avantages des deux géométries précédentes. Elle bénéficie tout d'abord des avantages d'une acquisition sur un demi-tour (à condition que l'angle Δ ne soit pas trop grand). Ensuite, l'implémentation de la méthode ne nécessite que des techniques du type rétroprojection des projections filtrées (pour autant que l'angle Δ soit assez grand ; une valeur de Δ trop petite implique inévitablement que la formule FBP utilisée dans la troisième étape de la méthode devient instable).

6.5 Vérification de la méthode

Nous proposons ici de montrer que la méthode d'inversion de la transformée rayons X exponentielle fournit des images de bonne qualité. La méthode de reconstruction est testée sur des données simulées à partir d'un fantôme 3D simplifié du cœur composé

de trois ellipsoïdes. Une description complète de ce fantôme est fournie à l'annexe C.1. Il doit être clair que cette section ne porte que sur la vérification de la méthode d'inversion. Les données de simulation correspondent à un jeu de projections parallèles exponentielles idéales, c'est-à-dire calculées de manière analytique sur base des définitions des ellipsoïdes constituant le fantôme.

Dans cette étude, nous nous limitons à 3 géométries RSH particulières. Nous considérons tout d'abord un angle d'inclinaison du collimateur $\gamma = 30°$ tout au long de nos simulations. Les géométries considérées correspondent à 6 cercles tangents couvrant $360°$, 3 cercles tangents couvrant exactement $180°$ et 4 cercles non-tangents couvrant $210°$ ($\Delta = 30°$). Pour cette dernière géométrie, deux implémentations sont proposées.

6.5.1 Détails d'implémentation

Supposons que les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ soient connues pour un ensemble Ω du type RSH vérifiant notre CNS. D'une manière générale, la méthode de reconstruction en géométrie RSH peut être implémentée de la manière suivante :

• **Étape 1.** À partir des projections données, synthétiser un jeu de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ pour φ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ ou $[0, \pi[$ selon la géométrie considérée.
• **Étape 2.** Reconstruire f en utilisant les projections synthétisées $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dans un schéma de reconstruction "pseudo-3D" incluant la formule d'inversion 2D adéquate (série de Neumann ou rétroprojection des projections filtrées). Chaque tranche f_z est reconstruite indépendamment des autres tranches.

Avant de donner les détails d'implémentation des étapes 1 et 2 du processus de reconstruction, nous décrivons les trois géométries étudiées. La première géométrie étudiée (voir figure 6.10a) consiste en 6 cercles d'ouverture angulaire égale à $60°$ dont les centres $\underline{c}_i$ ($i = 1, \ldots, 6$) sont uniformément répartis sur le grand cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$:

$$\underline{c}_i = (\cos(120° + (i-1)\,60°), \sin(120° + (i-1)\,60°), 0), \quad i = 1, \ldots, 6 \tag{6.7}$$

La seconde géométrie étudiée (voir figure 6.10b) consiste en 3 cercles d'ouverture angulaire égale à $60°$ dont les centres $\underline{c}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont angulairement espacés de $60°$:

$$\underline{c}_i = (\cos(120° + (i-1)\,60°), \sin(120° + (i-1)\,60°), 0), \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.8}$$

Finalement, la dernière géométrie étudiée (voir figure 6.10c) consiste en 4 cercles d'ouverture angulaire $60°$ dont les centres $\underline{c}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sont angulairement espacés de $50°$:

$$\underline{c}_i = (\cos(105° + (i-1)\,50°), \sin(105° + (i-1)\,50°), 0), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{6.9}$$

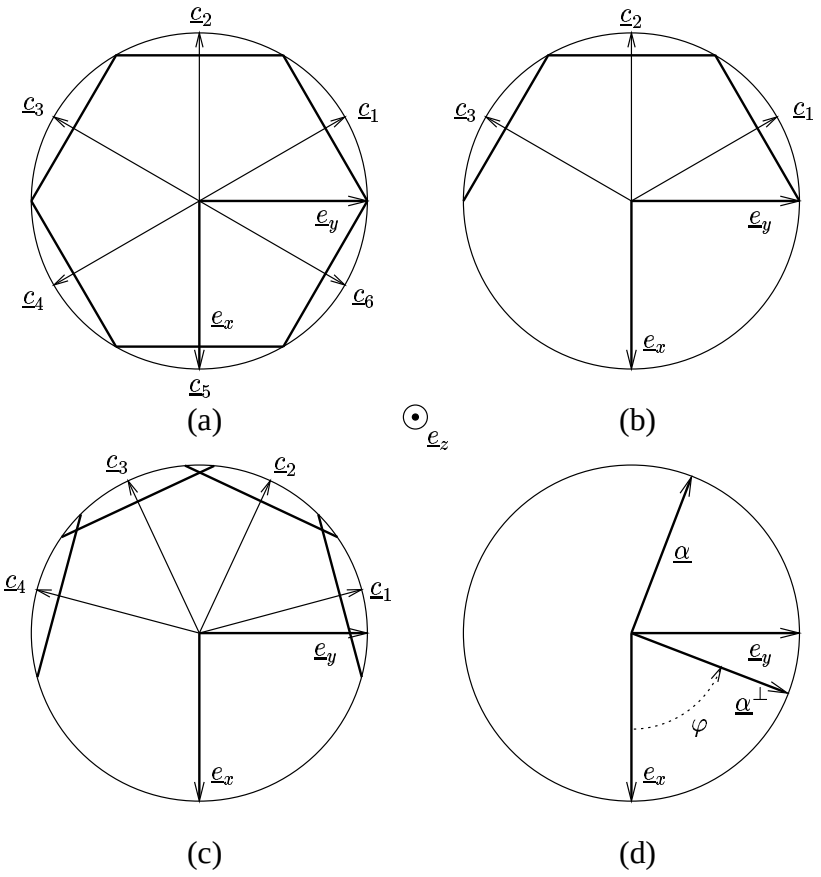


FIG. 6.10 – Illustration des géométries RSH étudiées. (a) 6 cercles tangents sur $360°$. (b) 3 cercles tangents sur $180°$. (c) 4 cercles non-tangents sur $210°$. (d) Illustration de la paramétrisation des vecteurs $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}^{\perp}$; l'angle polaire φ est mesuré par rapport à $\underline{e}_z$

Implémentation de l'étape 1

L'étape 1 du processus de reconstruction consiste à synthétiser un jeu de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{\alpha})$ à partir des projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$. La figure 6.10d illustre la paramétrisation du vecteur $\underline{\alpha}$ dans les axes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\alpha}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{6.10}$$

De la même manière, nous avons introduit le vecteur $\underline{\alpha}^{\perp}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Pour la géométrie présentant $N = 6$ cercles, la variable φ appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$ tandis que pour les deux autres géométries, cet intervalle est réduit à $[0, \pi[$. Le choix du coefficient d'atténuation $\mu_1(\varphi)$ des projections synthétisées dépend essentiellement de la géométrie considérée. La figure 6.11 indique le choix que nous avons réalisé pour chacune des géométries. De plus, elle indique le numéro du cercle à partir duquel la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ est synthétisée pour une valeur de φ fixée. Par exemple, pour la géométrie constituée de 3 cercles tangents, la projection $p_{\mu_1(80°)}(\underline{\alpha}(80°), \underline{s})$ est synthétisée pour $\mu_1(80°) = \mu_0$ à partir des projections données sur le cercle 2 (c'est-à-dire de centre $\underline{c}_2$). Pour la géométrie constituée de 4 cercles, nous proposons deux choix pour $\mu_1(\varphi)$, ce qui conduit à deux implémentations différentes de l'inversion.

Par la suite, nous supposons connues N_{cercle} projections $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ par cercle. Les données du problème de reconstruction sont donc NN_{cercle} projections parallèles exponentielles, où N est le nombre de cercles de la géométrie considérée. Nous avons discrétisé la variable φ (qui fixe l'échantillonnage du vecteur $\underline{\alpha}$ sur le cercle $\mathcal{C}(\underline{e}_z)$) de la manière suivante

$$\varphi_k = k\,\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{\pi \text{ ou } 2\pi}{N_\varphi}, \quad k = 0, \ldots, (N_\varphi - 1) \tag{6.11}$$

où $\Delta\varphi$ est le pas d'échantillonnage et N_φ est le nombre d'échantillons. La synthèse des N_φ projections $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ est réalisée par l'**algorithme des directions ordonnées** présenté au chapitre 5. Le nombre d'opérations nécessaires à la synthèse d'une projection étant proportionnel à M^3, l'étape 1 du processus de reconstruction en géométrie RSH présente un nombre d'opérations de l'ordre de $N_\varphi M^3 = M^4$ si $N_\varphi = M$.

Implémentation de l'étape 2

Dans cette étape de la reconstruction, f est reconstruite en utilisant un schéma de reconstruction "pseudo-3D" (section 2.4.3). Dans ce schéma, f est vue comme un empilement de tranches f_z perpendiculaires à $\underline{e}_z$ reconstruites séparément. Les valeurs de la projection exponentielle de Radon $[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z](\varphi, u)$ correspondent aux valeurs de la projection parallèle $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ le long de la droite d'équation $\underline{s} = u\underline{\alpha}^{\perp} + z\underline{e}_z$ (z étant fixé) :

$$[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z](\varphi, u) = p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), u\underline{\alpha}^{\perp}(\varphi) + z\underline{e}_z) \tag{6.12}$$

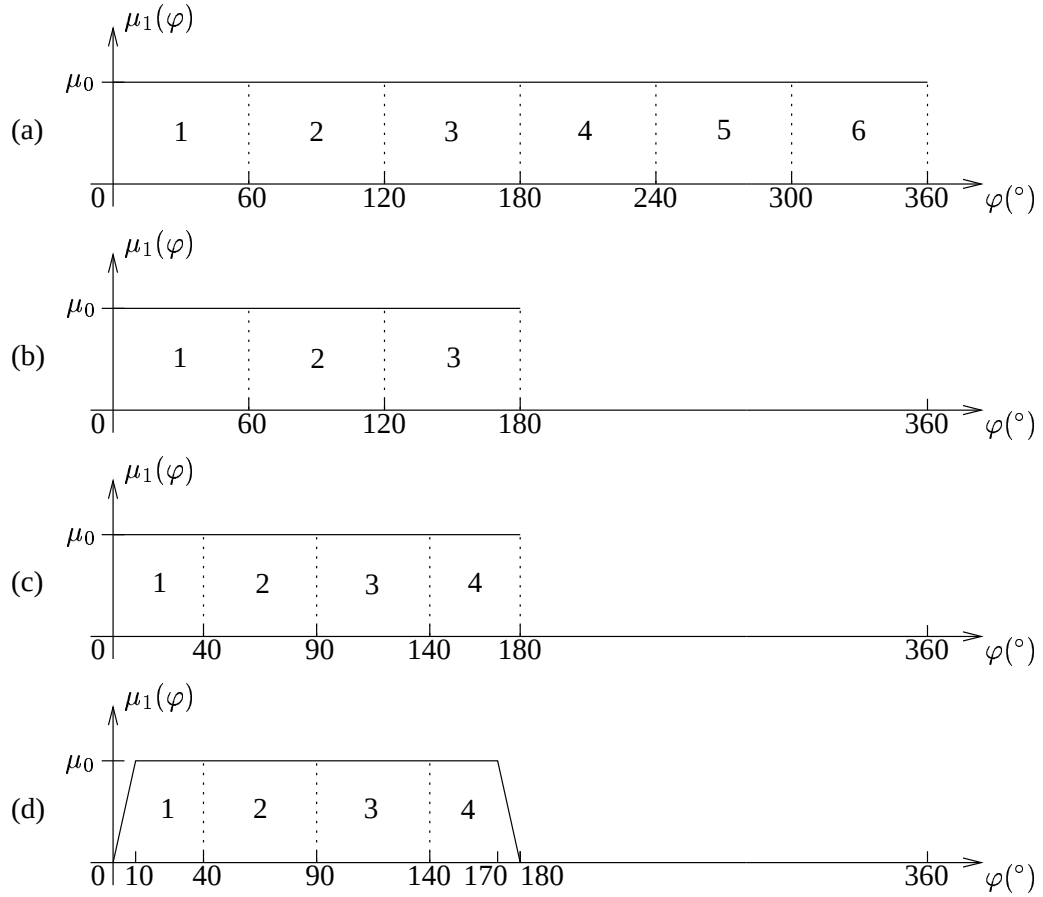


FIG. 6.11 – Choix de la fonction $\mu_1(\varphi)$. (a) 6 cercles tangents sur $360°$. (b) 3 cercles tangents sur $180°$. (c) 4 cercles non-tangents sur $210°$ (implémentation par série de Neumann). (d) 4 cercles non-tangents sur $210°$ (implémentation par rétroprojection des projections filtrées). Les chiffres apparaissant sur les graphes de la fonction $\mu_1(\varphi)$ correspondent au numéro du cercle à partir duquel la projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ est synthétisée.

Cette relation est valable pour $u \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, \pi[$ ou $[0, 2\pi[$ selon la géométrie. Dans la suite de cette section, nous ne considérerons donc plus que la reconstruction de la fonction 2D $f_z(x, y)$.

La méthode utilisée pour l'inversion de $[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z](\varphi, u)$ dépend de la forme de la fonction $\mu_1(\varphi)$. Pour la géométrie constituée de 3 cercles tangents sur $180°$, nous utilisons la théorie du chapitre 3 portant sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante sur $180°$. Voir la section 3.4.1 pour les détails d'implémentation. Il en va de même pour la géométrie constituée de 4 cercles non-tangents sur $210°$ pour laquelle nous avons choisi la fonction $\mu_1(\varphi)$ donnée à la figure 6.11c. Le nombre d'opérations nécessaires à l'étape 2 est de l'ordre de M^4.

Pour la géométrie constituée de 6 cercles tangents sur $360°$ et celle constituée de 4 cercles pour laquelle nous avons choisi la fonction $\mu_1(\varphi)$ donnée à la figure 6.11d, nous utilisons l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées que nous détaillons ci-après. Dans un premier temps, les projections exponentielles de Radon sont filtrées :

$$[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z]^F(\varphi, u) = \int_{\mathbb{R}} du' \, [\mathcal{R}_{\mu_1} f_z](\varphi, u') \, k_{\mu_1}(\varphi, u - u') \tag{6.13}$$

où le filtre k_{μ_1} est donné par

$$[\mathcal{F}_1 k_{\mu_1}](\varphi, \sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} + \frac{j}{2} \operatorname{sign}(\sigma) \, \mu_1'(\varphi) & \text{si } |\sigma| \geq |\overline{\mu}_1(\varphi)| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.14}$$

Nous avons discrétisé l'intégrale (6.13) de la manière suivante

$$[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z]^F(\varphi_k, u_m) \simeq \Delta u \sum_{m'=0}^{N_u - 1} [\mathcal{R}_{\mu_1} f_z](\varphi_k, u_{m'}) \, h^r_{\mu_1}(\varphi_k, (m - m')\Delta u) \tag{6.15}$$

où la variable u est échantillonnée de manière uniforme

$$u_m = u_0 + m \, \Delta u, \quad m = 0, \ldots, (N_u - 1) \tag{6.16}$$

avec u_0 choisi de telle sorte que les N_u échantillons soient centrés à l'origine ($u = 0$). La fonction $k^r_{\mu_1}$ est une version à bande limitée de k_{μ_1} définie par

$$k^r_{\mu_1}(\varphi, u) = \int_{|\sigma| \leq (1/2\Delta u)} d\sigma \, [\mathcal{F}_1 h_{\mu_1}](\varphi, \sigma) \, \left((1 - \lambda_2) + \lambda_2 \cos(2\pi \Delta u \sigma)\right) e^{j2\pi\sigma u} \tag{6.17}$$

avec $\lambda_2 \in [0, 0.5]$.

Les projections filtrées sont ensuite rétroprojetées suivant la formule

$$f_z(x, y) = p \int_0^{q\pi} d\varphi \, e^{-\mu_1(\varphi)(-x \sin\varphi + y \cos\varphi)} \, [\mathcal{R}_{\mu_1} f_z]^F(\varphi, u = x \cos\varphi + y \sin\varphi) \tag{6.18}$$

Deux cas sont à différencier. Le cas $(p, q) = (1, 2)$ correspond à la géométrie constituée de 6 cercles tangents ($\mu_1(\varphi) = \mu_0$) tandis que $(p, q) = (2, 1)$ correspond à la géométrie constituée de 4 cercles non-tangents pour laquelle nous avons choisi la fonction $\mu_1(\varphi) = \mu_0 T_{10^\circ}(\varphi)$ (voir figure 6.11d). Nous avons discrétisé cette intégrale de la manière suivante :

$$f_z(x, y) \simeq p\,\Delta\varphi \sum_{k=0}^{N_\varphi - 1} e^{-\mu_1(\varphi_k)(-x\,\sin\varphi_k + y\,\sin\varphi_k)}\,[\mathcal{R}_{\mu_1} f_z]^F(\varphi_k, x\,\cos\varphi_k + y\,\sin\varphi_k) \tag{6.19}$$

où $\Delta\varphi = q\pi/N_\varphi$. Si la tranche $f_z(x, y)$ est reconstruite sur une grille de $N_x \times N_y$ pixels, le nombre d'opérations nécessaires à l'étape de rétroprojection est proportionnel à $N_x N_y N_\varphi$. Dès lors, le nombre d'opérations nécessaires au calcul de la tranche f_z est proportionnel à $N_\varphi N_u \log N_u$ et à $N_x N_y N_\varphi$. Si l'image tridimensionnelle f est reconstruite sur N_z tranches f_z, c'est-à-dire sur une grille de $N_x \times N_y \times N_z$ voxels constituée de l'empilement de ces tranches, avec $N_x = N_y = N_z \simeq M$ et $N_\varphi \simeq N_u = M$, le nombre d'opérations nécessaires lors du processus de reconstruction est de l'ordre de M^4.

En conclusion, quel que soit le nombre N de cercles constituant la géométrie RSH considérée et le nombre N_{cercle} de projections données par cercle, le nombre d'opérations nécessaires à la reconstruction d'une image tridimensionnelle f sur une grille cubique de taille $M \times M \times M$ est de l'ordre de M^4.

6.5.2 Reconstructions

Pour tester notre méthode de reconstruction, nous avons utilisé le fantôme 3D du cœur décrit à l'annexe C.1. Quelle que soit la géométrie étudiée, nous avons choisi $N_{cercle} = 32$, c'est-à-dire 32 projections dont les directions sont uniformément réparties sur chaque cercle. Les projections parallèles exponentielles $p_{\mu_0}(\underline{\theta}, \underline{s})$ sont simulées avec $\mu_0 = 0.02\text{mm}^{-1}$ sur des grilles carrées centrées à l'origine $(\underline{s} = 0)$ de 100×100 pixels de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$.

L'algorithme des directions ordonnées est utilisé avec les paramètres suivants

$$N_\phi = 128, \quad N_l = N_t = 100, \quad \Delta l = \Delta t = 1.5\text{mm} \tag{6.20}$$

quelle que soit la projection synthétisée. Le nombre de projections synthétisées est égal à $N_\varphi = 121$ quelle que soit la géométrie.

L'image f est reconstruite sur une grille cubique centrée à l'origine de $N_x \times N_y \times N_z$ voxels cubiques de dimensions $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, où $N_x = N_y = N_z = 100$ et $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.5\text{mm}$. Nous donnons à présent les détails particuliers relatifs à chacune des 4 reconstructions présentées ci-après.

Pour la géométrie constituée de 6 cercles tangents sur $360°$, la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles est utilisée avec $\lambda_1 = 0$, ce qui correspond à une fenêtre de filtrage rectangulaire tandis que la reconstruction des différentes tranches f_z par l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées est réalisée avec $\lambda_2 = 0.5$, ce qui correspond à une fenêtre de filtrage de Hanning. Notons que les projections synthétisées sont échantillonnées sur $360°$ avec un pas angulaire égal à $2\pi/N_\varphi = 2.975°$. La figure 6.12 (2ème ligne) montre le résultat de la reconstruction.

La figure 6.12 (3ème ligne) montre le résultat de la reconstruction pour la géométrie constituée de 3 cercles tangents sur $180°$. Pour cette reconstruction, nous avons utilisé une série de Neumann limitée à 12 termes. Pour chacune des N_z tranches reconstruites, la norme de l'opérateur K a été estimée à $\|K\| = 1.0631$. Dès lors, nous avons utilisé l'opérateur relaxé $\widehat{K}_{opt}$ présentant une norme égale à $||\widehat{K}_{opt}|| = 0.728$. Notons que les projections synthétisées étaient échantillonnées sur $180°$ avec un pas angulaire égal à $\pi/N_\varphi = 1.4875°$.

Pour la géométrie constituée de 4 cercles non-tangents sur $210°$, deux reconstructions sont proposées. Pour la première, la méthode de synthèse de projections exponentielles a été utilisée avec $\lambda_1 = 0$ et nous avons utilisé une série de Neumann limitée à 12 termes ($\|K\| = 1.0631$ et $||\widehat{K}_{opt}|| = 0.728$). Pour la reconstruction obtenue par l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées, nous avons utilisé $\lambda_1 = 0.5$ pour la synthèse des projections exponentielles. Ensuite, la reconstruction tranche par tranche a été réalisée avec $\lambda_2 = 0.5$. Notons que dans les deux cas, les projections synthétisées sont échantillonnées sur $180°$ avec un pas angulaire égal à $\pi/N_\varphi = 1.4875°$. Les résultats de reconstruction sont donnés à la figure 6.13.

Quelle que soit la géométrie considérée, les résultats de reconstruction obtenus sont de bonne qualité. Il est à noter tout de même la présence de quelques artéfacts dans la reconstruction correspondant à la géométrie constituée de 4 cercles implémentée par l'algorithme de rétroprojection des projections filtrées. Cela est essentiellement dû au fait que la méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles a été utilisée avec un coefficient d'atténuation μ_1 des projections synthétisées différent de μ_0. Pour les 3 autres méthodes de reconstruction, $\mu_1(\varphi) = \mu_0$ pour toute valeur de φ et l'ouverture angulaire des cercles est inférieure à $90°$. Voir la section 5.2.2 pour l'étude du comportement numérique de la méthode de synthèse.

6.5.3 Fonctions de transfert

Nous étudions à présent le comportement fréquentiel de notre méthode d'inversion en présentant les fonctions de transfert locales pour les trois directions principales $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ et correspondant au point $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Les définitions et détails de calcul de ces fonctions sont donnés à l'annexe C.2. Nous présentons les 4 groupes de fonctions de transfert correspondant aux 4 méthodes de reconstruction étudiées ci-avant. Remar-

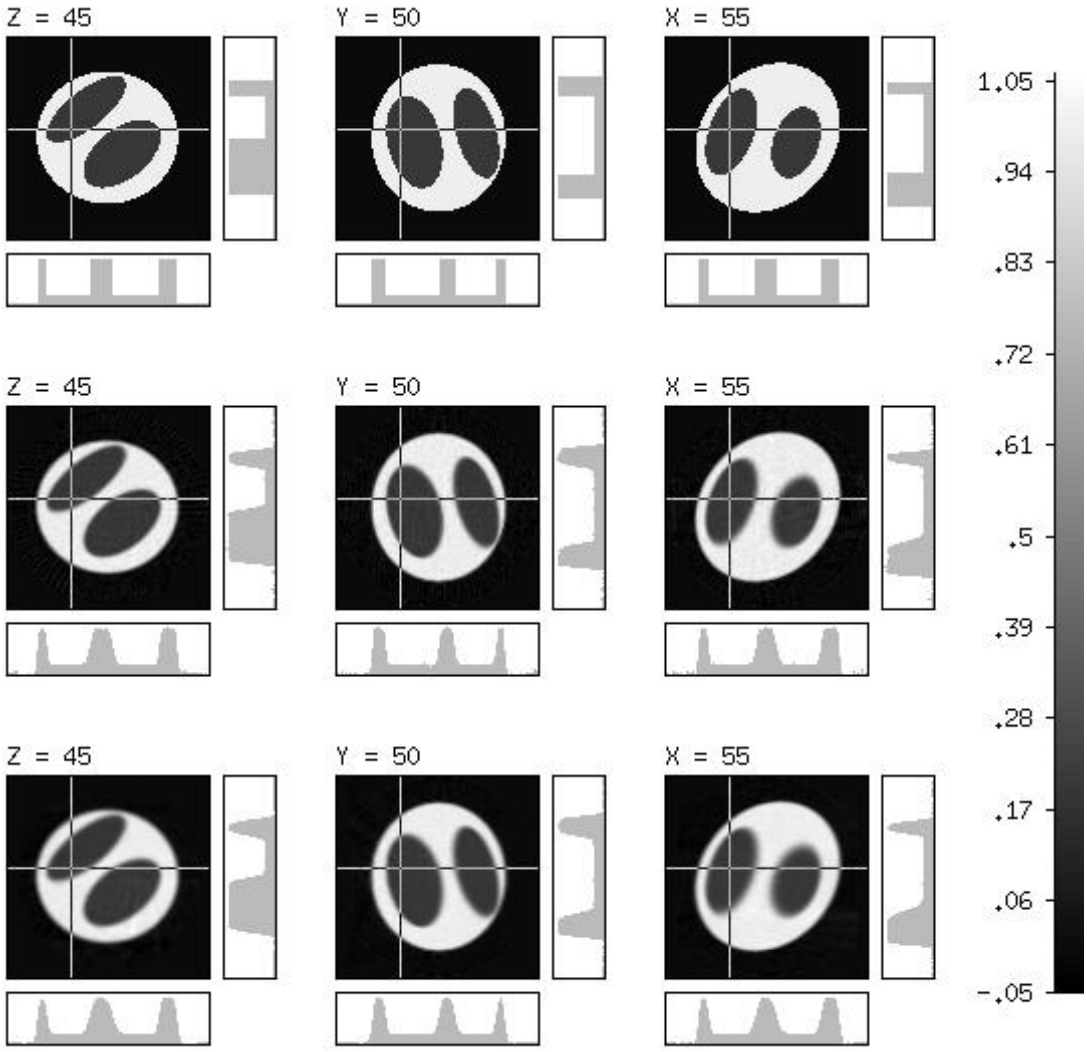


FIG. 6.12 – Résultats de reconstruction. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : 6 cercles tangents sur 360°. 3ème ligne : 3 cercles tangents sur 180°.

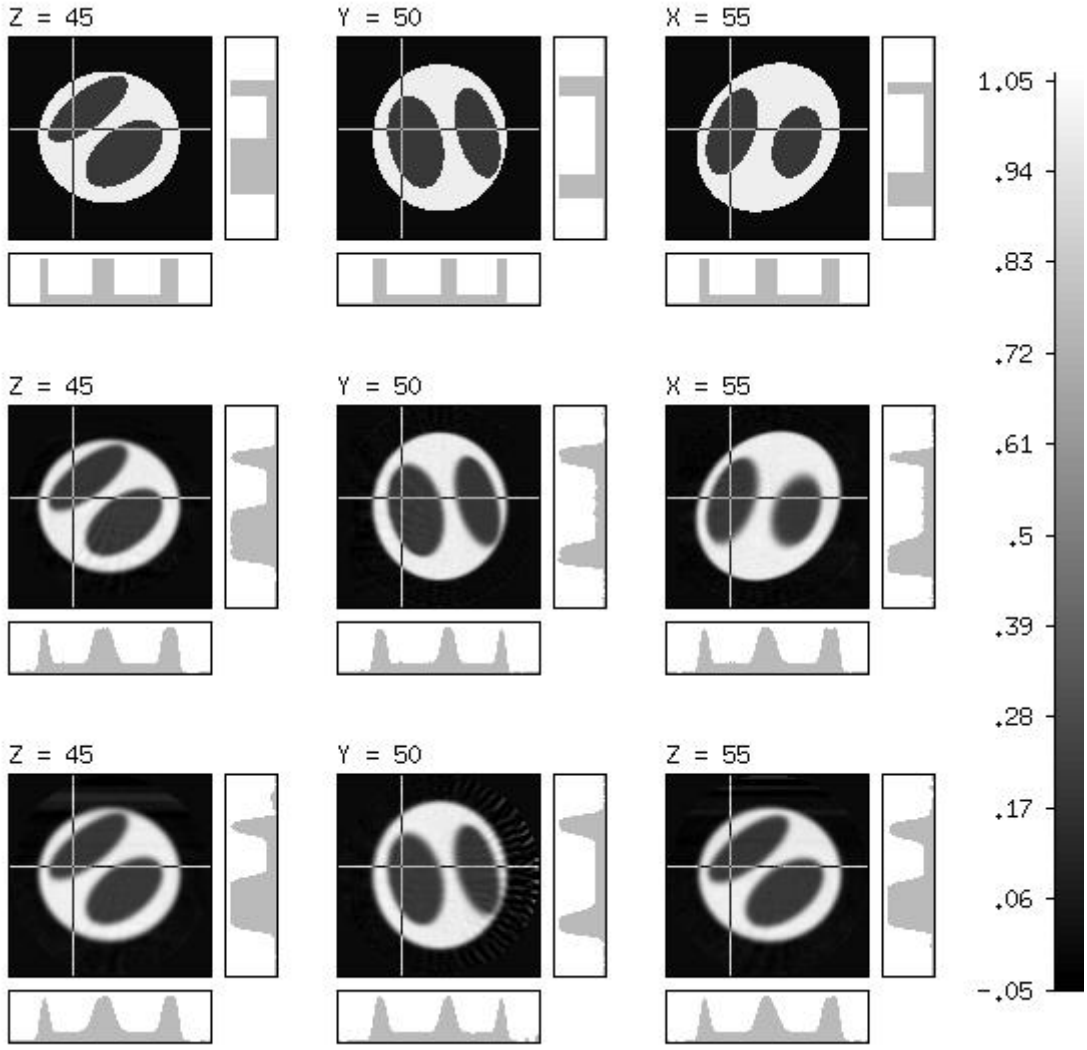


FIG. 6.13 – Résultats de reconstruction pour la géométrie constituée de 4 cercles non-tangents sur $210°$. 1ère ligne : fantôme discrétisé idéal. 2ème ligne : implémentation par série de Neumann. 3ème ligne : implémentation par rétroprojection des projections filtrées.

quons que la gaussienne utilisée pour le calcul des MTF a été reconstruite avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour reconstruire le fantôme du cœur, cela quelle que soit la géométrie étudiée.

La figure 6.14 montre les fonctions MTF_x, MTF_y et MTF_z pour les 4 méthodes considérées. Tout d'abord, nous remarquons que la résolution spatiale est meilleure dans la direction $\underline{e}_z$, cela pour n'importe quelle des quatre méthodes. Ensuite, pour les basses fréquences ($\sigma < 0.08$), les deux fonctions de transfert MTF_x et MTF_y sont assez semblables, ce qui indique une résolution spatiale assez uniforme dans les tranches perpendiculaires à $\underline{e}_z$. Finalement, c'est la géométrie RSH constituée de 4 cercles implémentée par FBP qui présente la plus faible résolution spatiale, quelque soit la direction. Cela est essentiellement dû au fait d'avoir utilisé la fenêtre d'apodisation de Hanning ($\lambda_1 = 0.5$ et $\lambda_2 = 0.5$) qui est plus sévère envers les hautes fréquences que la fenêtre rectangulaire.

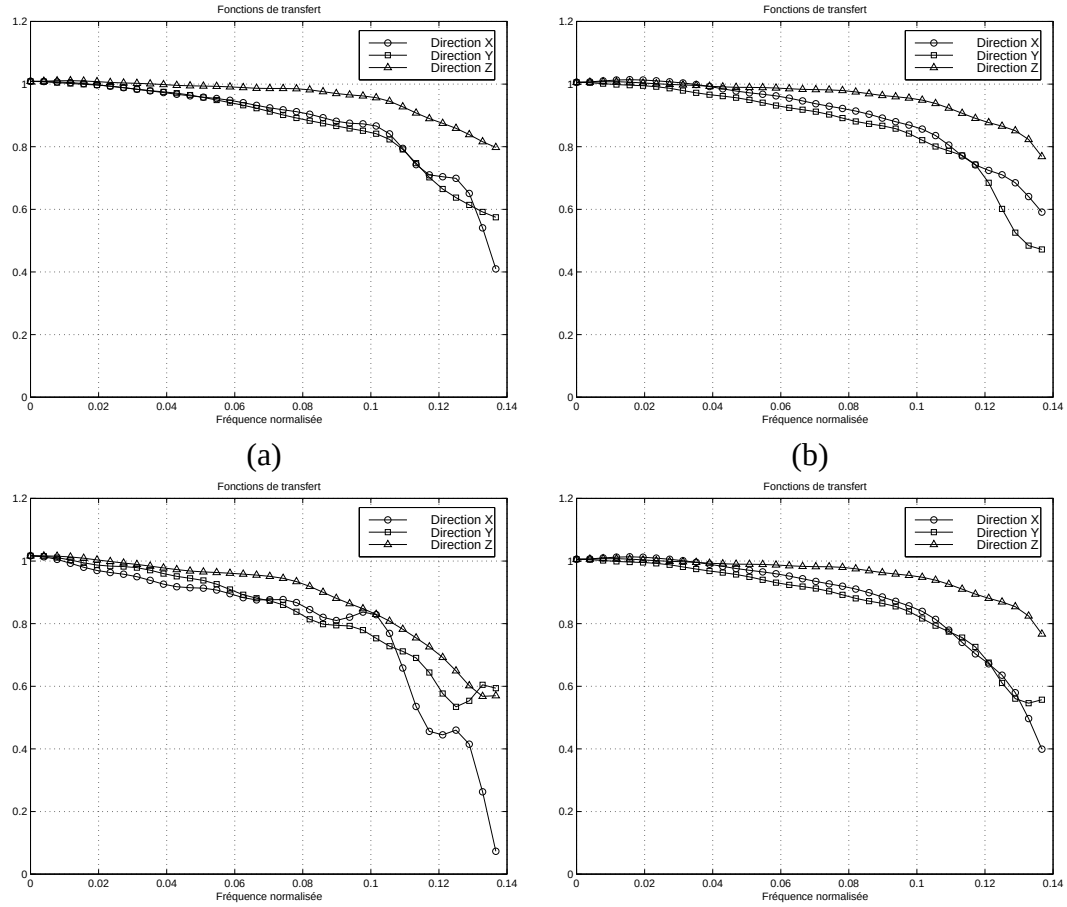


FIG. 6.14 – Fonctions de transfert locales de la méthode d'inversion en géométrie RSH correspondant au point $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. (a) 6 cercles tangents sur $360°$. (b) 3 cercles tangents sur $180°$. (c) 4 cercles non-tangents sur $210°$, implémentation FBP. (d) 4 cercles non-tangents sur $210°$, implémentation par série de Neumann.

Chapitre 7

Expérience avec données réelles

Les résultats présentés dans ce chapitre correspondent au traitement de projections parallèles atténuées réelles acquises au *Medical Imaging Research Laboratory* (MIRL) de l'Université d'Utah. Un prototype de scanner RSH SPECT y est en effet en cours de développement par le Professeur Rolf Clackdoyle. Les mesures furent acquises lors d'un séjour au MIRL réalisé en juillet 2000. Nous tenons à remercier Paul Christian et Girish Bal du MIRL pour toute l'aide qu'ils nous ont apportée lors de la prise en main et de l'utilisation du scanner.

7.1 Description de l'expérience

7.1.1 Le scanner

Le scanner est un scanner médical SPECT classique. Il comporte une table et trois détecteurs munis chacun à l'origine d'un collimateur à trous parallèles conventionnel, c'est-à-dire dont l'orientation des trous est perpendiculaire à la surface du détecteur. La figure 7.1 montre une photographie du scanner. Les trois détecteurs peuvent subir une rotation autour de l'axe du lit d'examen et la distance entre l'axe de rotation et le détecteur peut être fixée par l'utilisateur. La position de la table d'examen présente trois degrés de liberté : elle peut subir une translation selon l'axe de rotation des détecteurs, une translation verticale ou encore une translation latérale.

Lors de nos mesures, un seul des trois détecteurs a été utilisé et le collimateur conventionnel correspondant a été remplacé par un prototype de collimateur rotatif à trous obliques à deux segments. La figure 7.2 montre une photographie du collimateur RSH utilisé avant montage sur la tête du détecteur. On voit sur cette figure les deux segments séparés par un diamètre. Pour chacun de ces segments, l'orientation des trous présente un angle de 30° avec la normale au collimateur. La rotation et le positionnement du collimateur sont pilotés par un ordinateur PC.

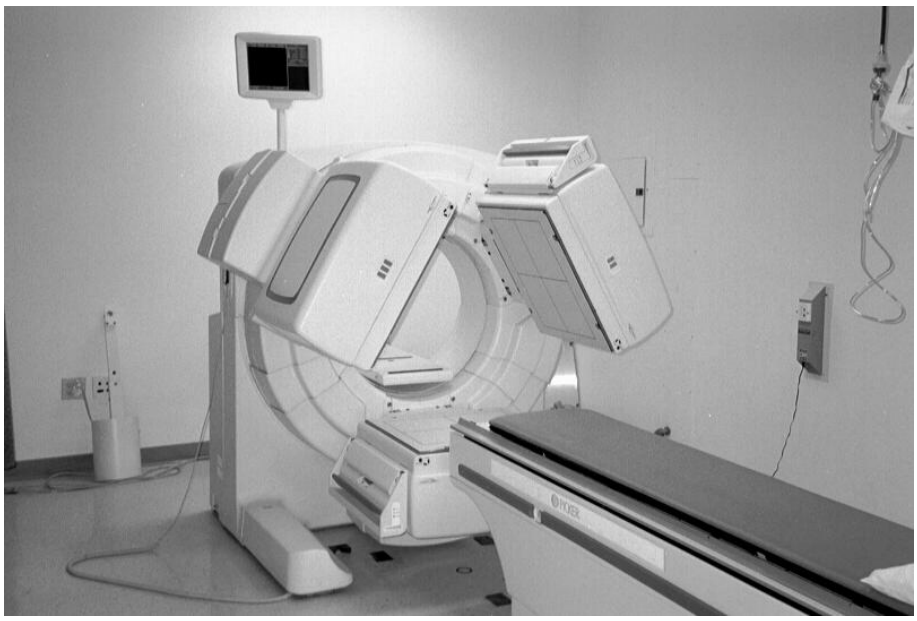


FIG. 7.1 – Photographie du scanner où l'on peut observer la table d'examen et trois détecteurs conventionnels.

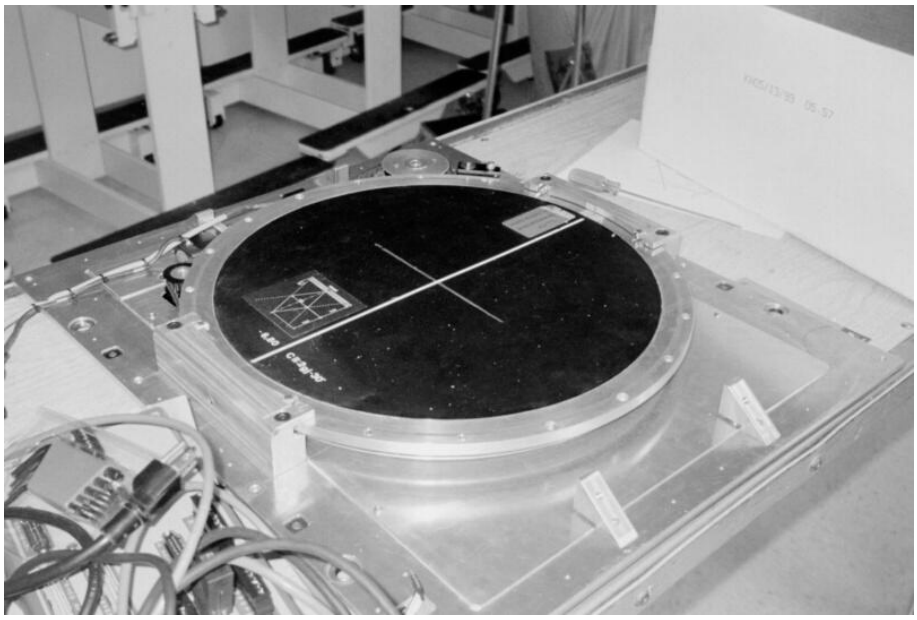


FIG. 7.2 – Photographie du collimateur RSH monté sur un des trois détecteurs du scanner. La ligne blanche épaisse indique la séparation entre les deux segments.

7.1.2 Le fantôme

Les mesures que nous avons réalisées correspondent à un fantôme statique du cœur[1], utilisé couramment lors de tests de différentes méthodes rencontrées en imagerie SPECT. Ce fantôme est constitué de l'assemblage d'un cylindre creux et d'une demi-sphère creuse (figure 7.3). Une fois rempli d'un traceur radioactif, ce fantôme modélise approximativement la distribution spatiale moyenne (sur le temps) de la concentration d'un traceur radioactif qui se serait fixé dans les parois du cœur en mouvement d'un patient standard. De plus, ce fantôme présente un défaut, c'est-à-dire une zone où le produit radioactif ne peut aller se placer. Ce défaut modélise une mauvaise irrigation sanguine dans une des parois du cœur. Pour nos expériences, le traceur radioactif utilisé fut l'isotope Technetium 99m qui présente une demi-durée de vie égale à 6.03 heures. Insistons sur le fait que, une fois introduit dans le fantôme du cœur, le traceur radioactif a une concentration **uniforme** sur tout le volume occupé.

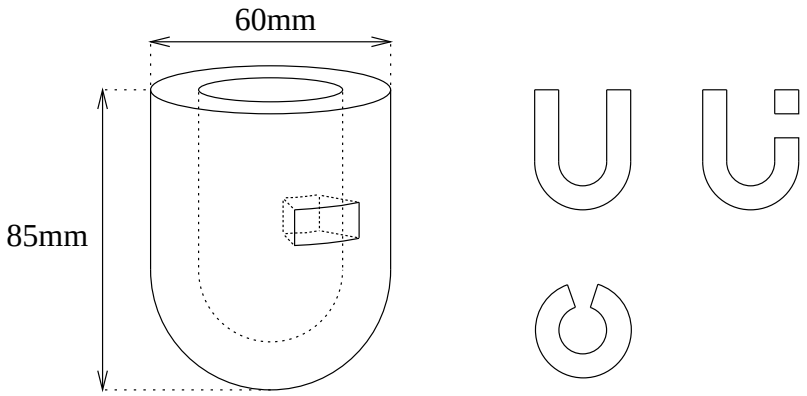


FIG. 7.3 – Illustration du fantôme du cœur utilisé pour nos mesures. (a) Vue en perspective. (b) 3 coupes selon 3 directions perpendiculaires entre elles.

Une fois rempli, le fantôme du cœur a été fixé à l'intérieur d'une cuve cylindrique à base elliptique modélisant le thorax dont les dimensions de la base sont 31.5cm pour le grand diamètre intérieur et 23.5cm pour le petit diamètre intérieur. De plus, une bouteille fermée en plastique et remplie d'air a été disposée à côté du fantôme afin de simuler une atténuation non constante en dehors de la zone d'émission. La figure 7.4 montre une photographie du scanner adapté pour notre expérience et du positionnement de la cuve cylindrique sur la table d'examen tandis que la figure 7.5 fournit un schéma du système de mesures.

[1] Il s'agit du *standard Data Spectrum cardiac insert*.

FIG. 7.4 – Photographie du scanner adapté pour nos mesures sur laquelle on voit le collimateur RSH et la cuve cylindrique contenant le fantôme du cœur.

7.1.3 Les projections

Pour notre expérience, nous avons considéré 4 positions du détecteur autour de la table d'examen. Ces positions sont détaillées à la section 7.1.4 avec la description de la géométrie d'acquisition. Pour chacune des positions de la caméra, le collimateur a subi une rotation de $360°$ autour de son axe de rotation. Plus précisément, 32 positions du collimateur uniformément réparties sur $360°$ ont été considérées.

Pour chaque position du collimateur, deux projections parallèles du fantôme sont mesurées simultanément grâce aux deux segments du collimateur RSH. Par la suite, nous appelons *prise de vue* l'acquisition simultanée de deux projections parallèles sur le détecteur. Lors de nos mesures, chaque prise de vue fut acquise sur une grille carrée de 256×256 pixels de dimensions $2.33\text{mm} \times 2.33\text{mm}$ tandis que la durée de comptage des photons a été fixée à 30 secondes par prise de vue[2]. Sachant que le temps écoulé entre la fin d'une prise de vue et la suivante était égal à 15 secondes, la durée d'une acquisition complète fut de $4 \times 32 \times (30 + 15) = 5760$ secondes, soit 1 heure et 36 minutes, temps auquel il faut encore ajouter quelques minutes pour faire passer le détecteur d'une position à la suivante et pour régler les paramètres de position de la table et du détecteur. Nous avons en effet dû adapter la position de la table (translation verticale et latérale) ainsi que la distance entre l'axe de rotation et le détecteur afin d'assurer l'acquisition de projections non tronquées, c'est-à-dire de projections telles que la projection du fantôme au travers de chaque segment du collimateur soit com-

[2]Le nombre de photons comptés était de l'ordre de 1.4×10^6 par prise de vue.

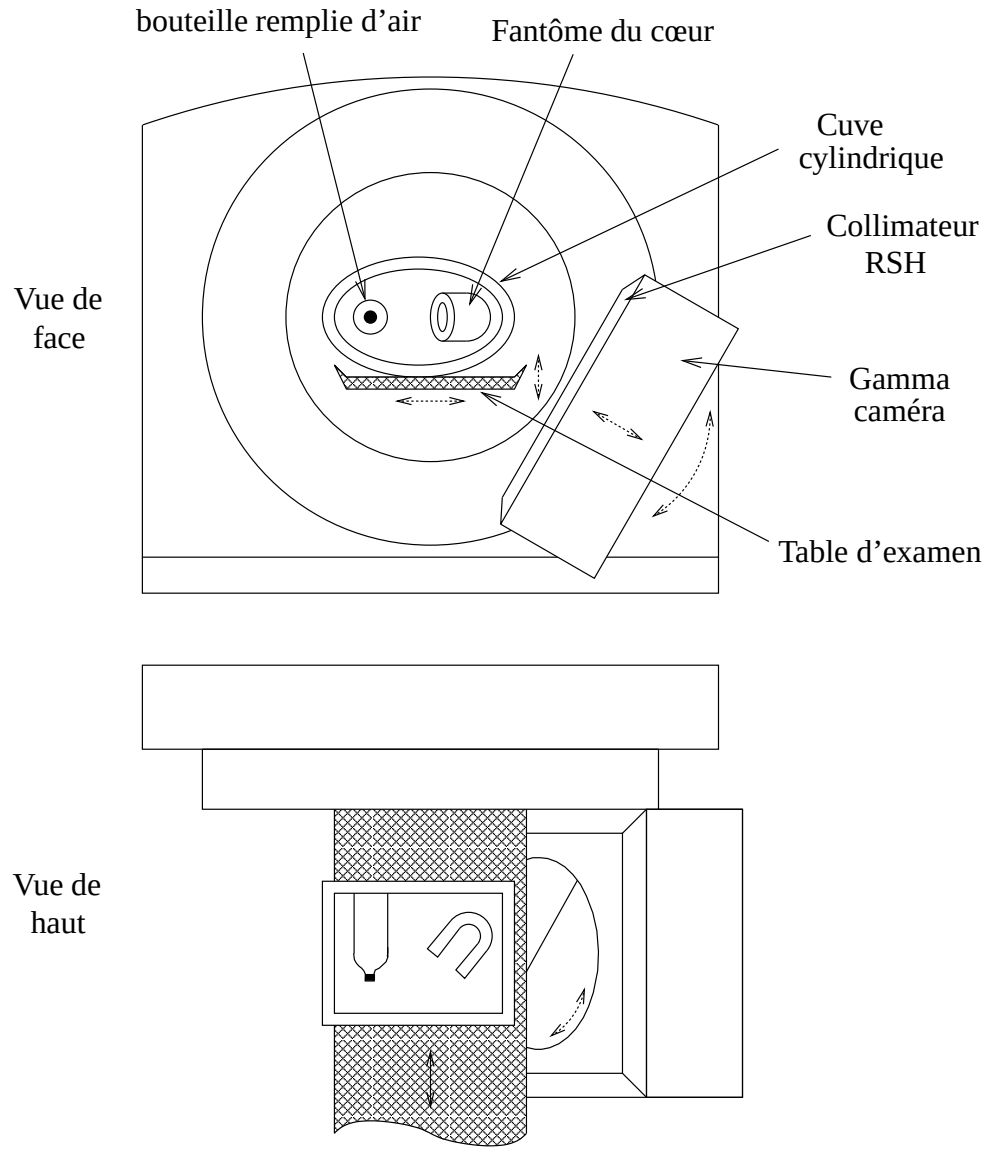


FIG. 7.5 – Schéma du système de mesures. Nous n'avons représenté que le détecteur utilisé. Les flèches en pointillé indiquent les mouvements possibles des différents éléments du scanner.

plètement mesurée sur la surface du détecteur.

Au cours de l'acquisition, le traceur radioactif se désintégrait avec un taux λ directement lié à sa demi-durée de vie $T_{1/2}$:

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = 0.5 \implies \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \tag{7.1}$$

Pour le Tc99m, la taux λ est égal à $0.00191583\,\text{minute}^{-1}$. Il a donc été nécessaire de corriger le phénomène de décroissance radioactive en multipliant chaque prise de vue par un facteur dépendant de l'instant de sa mesure. Supposons que l'acquisition des mesures ait commencé à l'instant $t = 0$. La prise de vue obtenue en comptant les photons entre l'instant t_1 et t_2 ($t_2 - t_1 = 30$ secondes dans notre cas) est alors divisée par le facteur

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, e^{-\lambda t} = \frac{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}}{\lambda} \tag{7.2}$$

Nous observons que plus t_1 est grand, plus le numérateur de cette fraction tend vers zéro, ce qui revient à multiplier la prise de vue par un nombre d'autant plus grand que la désintégration de l'isotope est avancée.

Nous avons eu l'occasion d'acquérir deux jeux complets de mesures :

- Dans un premier temps, la cuve cylindrique était vide, c'est-à-dire remplie d'air. Le jeu de projections parallèles obtenus correspondait donc à un ensemble de projections non-atténuées, c'est-à-dire correspondant à une carte d'atténuation identiquement nulle. La figure 7.6 (1ère ligne) montre deux prises de vue correspondant à l'expérience "**cuve vide**". Les projections furent, dans ce cas, traitées comme de simples projections parallèles, négligeant ainsi toute atténuation.
- Lors de la seconde expérience, la cuve fut remplie d'eau afin de simuler une carte d'atténuation pratiquement uniforme dans la région d'émission mais non-uniforme en dehors de cette région. La figure 7.6 (2ème ligne) montre deux prises de vue correspondant à l'expérience "**cuve pleine**". La comparaison des deux lignes d'images sur cette figure illustre clairement l'effet de l'atténuation subie par les photons.

Remarquons que l'utilisation d'un collimateur RSH à 2 segments permet en principe de limiter la rotation du collimateur à 180° autour de son axe tout en mesurant un jeu de projections parallèles dont les directions correspondent à un cercle complet de la sphère unitaire. En effet, chaque segment fournit dans ce cas les projections sur un demi-cercle. Dans nos expériences, nous avons fait subir au collimateur une rotation de 360° autour de son axe de rotation. Ayant choisi 32 positions uniformément échantillonnées du collimateur, chaque projection parallèle fut mesurée deux fois en des instants différents. Après correction du phénomène de décroissance radioactive, nous

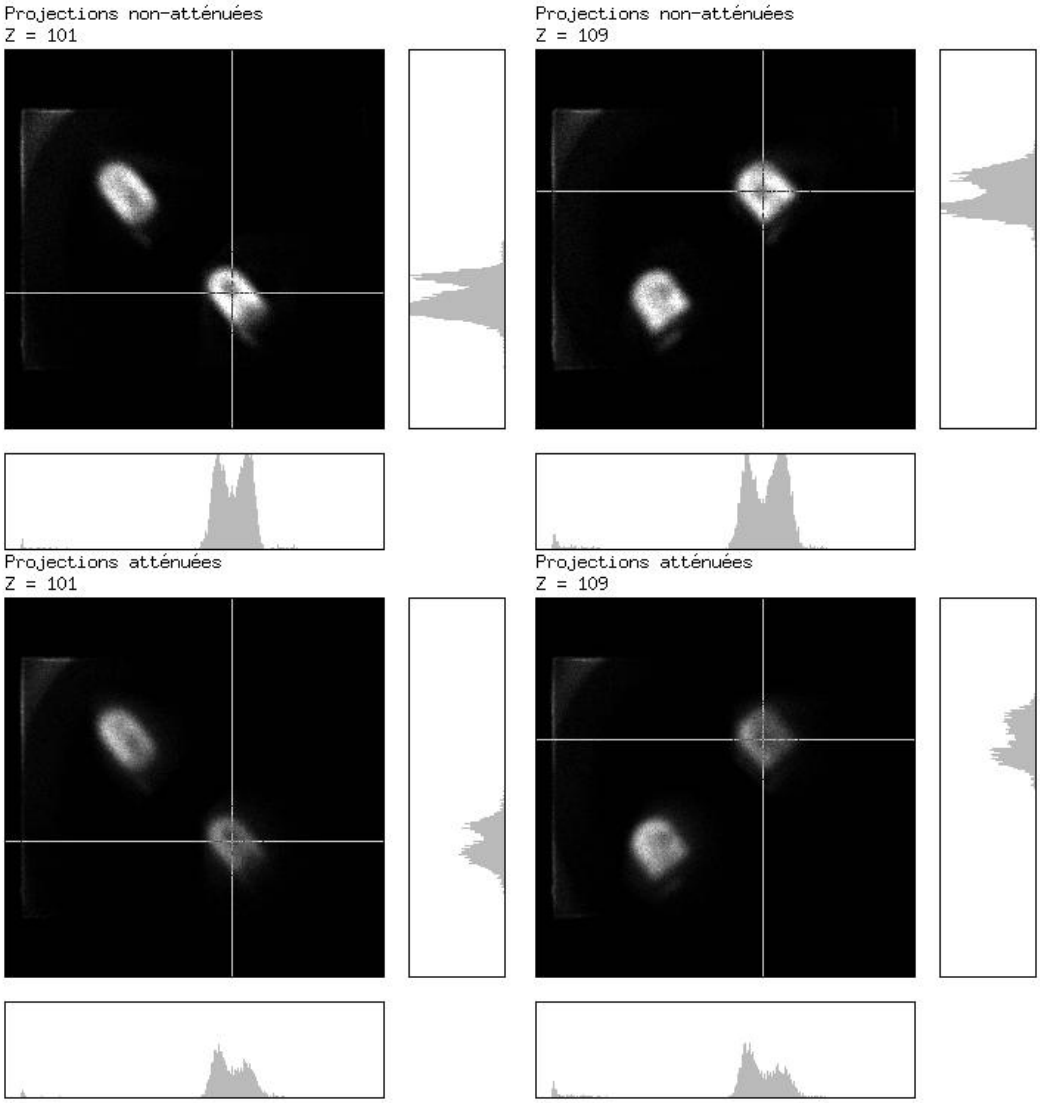


FIG. 7.6 – Quelques prises de vue. (1ère ligne) Sans atténuation (expérience “cuve vide”). (2ème ligne) Avec atténuation (expérience “cuve pleine”). Chaque colonne correspond à une même position du détecteur et du collimateur.

avons moyenné les deux mesures relatives à chaque projection avant de commencer tout autre traitement.

7.1.4 La géométrie RSH considérée

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, quatre positions du détecteur ont été considérées. Ces positions sont caractérisées par le vecteur unitaire $\underline{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ perpendiculaire à la surface du détecteur. Dans notre expérience, les quatre vecteurs $\underline{c}_i$ étaient angulairement espacés de $50°$ et mesurés par rapport à la verticale inférieure comme le montre la figure 7.7. Cette figure illustre également le choix du système d'axes orthonormés $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Le vecteur $\underline{e}_z$ est parallèle à la table d'examen, c'est-à-dire orienté selon l'axe de rotation principal du système. Le vecteur $\underline{e}_y$ pointe vers le sol avec un léger angle d'inclinaison de $5°$ par rapport à la direction verticale inférieure. Ce choix correspond à une des géométries d'acquisition étudiées au chapitre 6. Il s'agit de la géométrie RSH constituée de 4 cercles non-tangents sur $210°$ et d'ouverture angulaire égale à $60°$.

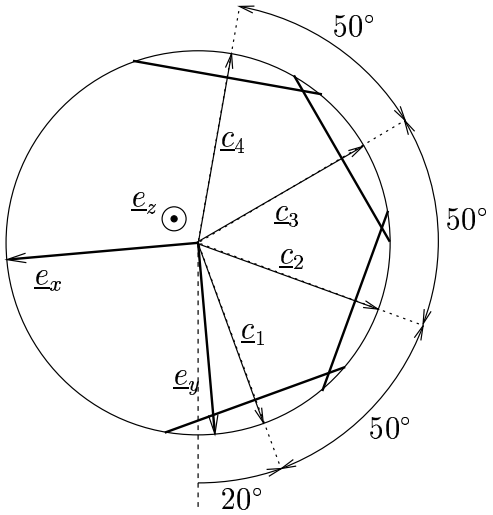


FIG. 7.7 – Illustration des quatre positions du détecteur, mise en place du système d'axes orthonormés $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ et description de la géométrie d'acquisition des projections.

7.2 Reconstructions

À partir des mesures obtenues et après correction du phénomène de décroissance radioactive et moyennage des projections identiques, nous avons réalisé trois reconstructions :

– La première traite les projections non-atténuées correspondant à l'expérience "cuve vide".

– La seconde reconstruction traite les projections atténuées de l'expérience "cuve pleine" en négligeant complètement le phénomène d'atténuation, ce qui conduit comme nous allons le voir à des résultats relativement pauvres.
– La dernière reconstruction traite les projections atténuées de l'expérience "cuve pleine" en corrigeant l'atténuation par utilisation de la transformée rayons X exponentielle.

7.2.1 Sans atténuation

Pour l'expérience "cuve vide", la reconstruction de la distribution de la concentration du traceur radioactif a été réalisée en utilisant la méthode d'inversion correspondant à la seconde implémentation proposée pour cette géométrie RSH (voir chapitre 6) avec $\mu_0 = 0$, ce qui revient à considérer les projections mesurées comme de simples projections parallèles. Pour rappel, cette méthode consiste, dans un premier temps, à synthétiser, à partir des projections données, un jeu de projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ dont le coefficient d'atténuation est égal à $\mu_1(\varphi) = \mu_0 T_{10^\circ}(\varphi)$. Ensuite, la reconstruction est réalisée tranche par tranche perpendiculaire à $\underline{e}_z$ par rétroprojection des projections filtrées. Pour la synthèse des projections parallèles exponentielles, nous avons utilisé l'algorithme des directions ordonnées.

À partir des projections mesurées, $N_\varphi = 181$ projections parallèles exponentielles $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ furent synthétisées sur $180°$. Pour chaque valeur de φ fixée, c'est-à-dire pour chaque projection synthétisée, les paramètres utilisés dans l'algorithme des directions ordonnées furent les suivants :

$$N_{cercle} = 32, \quad N_\phi = 128 \tag{7.3}$$

$$N_l = N_t = 80, \quad \Delta l = \Delta t = 2\text{mm} \tag{7.4}$$

$$\lambda_1 = 0.5 \tag{7.5}$$

Ainsi, pour la synthèse de chaque projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$, $N_\phi = 128$ projections intermédiaires furent calculées, par interpolation linéaire à partir des 32 projections données sur le cercle correspondant, sur une grille de 80×80 pixels de dimensions $2\text{mm} \times 2\text{mm}$. De plus, chaque projection $p_{\mu_1(\varphi)}(\underline{\alpha}(\varphi), \underline{s})$ fut synthétisée sur une grille de 80×80 pixels de dimensions $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ avec $\lambda_1 = 0.5$. Finalement, les 181 projections synthétisées furent utilisées pour reconstruire l'image sur une grille de $80 \times 80 \times 80$ voxels de dimensions $2\text{mm} \times 2\text{mm} \times 2\text{mm}$ par rétroprojection des projections filtrées avec $\lambda_2 = 0.5$.

Le choix de l'orientation des axes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ ne permet pas une visualisation aisée de la reconstruction. Nous avons fait subir à la grille contenant l'image reconstruite une rotation afin d'amener l'axe de symétrie du fantôme du cœur dans la direction $\underline{e}_z$ et ainsi faire apparaître des tranches intéressantes comme celles de la figure 7.3b.

De plus, afin de faciliter la comparaison, les niveaux de la reconstruction ont été divisés par la valeur maximale de la reconstruction. La première ligne des figures 7.8 et 7.9 montre le résultat obtenu. Les deux figures 7.8 et 7.9 correspondent aux mêmes reconstructions mais avec des affichages différents. La figure 7.8 correspond à une échelle **linéaire** de niveaux de gris allant de 0 à 1. La figure 7.9 correspond à une échelle **non-linéaire** des niveaux de gris allant de 0 à 1 permettant de mieux mettre en évidence l'uniformité ou la non-uniformité présente dans la reconstruction. Nous observons que la reconstruction correspondant à l'expérience "cuve vide" (reconstruction sans atténuation) présente des niveaux pratiquement uniformes dans la région du cœur où le traceur a été introduit. On voit également bien apparaître le défaut (manque d'irrigation sanguine) dont nous avons déjà parlé.

7.2.2 Avec atténuation mais sans correction d'atténuation

Dans le cas de l'expérience "cuve pleine", les données fournies par le scanner (après correction du phénomène de décroissance radioactive et moyennage des projections identiques), correspondent à un jeu de projections parallèles atténuées. Nous avons réalisé la reconstruction de la distribution du traceur radioactif à partir de ces données en négligeant complètement le phénomène d'atténuation subi par les photons. On parle alors de reconstruction sans correction d'atténuation.

Pour la reconstruction, nous avons considéré les projections de l'expérience "cuve pleine" comme de simples projections parallèles ($\mu_0 = 0$). L'algorithme utilisé pour reconstruire la distribution de la concentration du traceur radioactif est exactement le même que celui utilisé sur les données de l'expérience "cuve vide", les paramètres étant en tout point identiques. À nouveau, nous avons fait subir une rotation à la grille contenant la reconstruction afin de faire apparaître des tranches intéressantes et les niveaux de la reconstruction ont été divisés par la valeur maximale de la reconstruction.

La deuxième ligne des figures 7.8 et 7.9 montre le résultat obtenu. Ces images sont peu satisfaisantes dans le sens où la reconstruction n'est pas uniforme. Ceci n'est pas dû à notre méthode de reconstruction mais bien au fait que la carte d'atténuation $a(\underline{x})$ a tout simplement été négligée.

7.2.3 Avec atténuation et correction d'atténuation

Nous considérons à nouveau ici les données de l'expérience "cuve pleine". Cependant, nous allons maintenant tenir compte de l'atténuation subie par les photons. On parle alors de reconstruction avec correction d'atténuation.

Les données fournies par le scanner sont donc maintenant considérées comme des projections parallèles atténuées. Notre méthode d'inversion en géométrie RSH ne s'appliquant qu'à des projections parallèles exponentielles, il est tout d'abord nécessaire

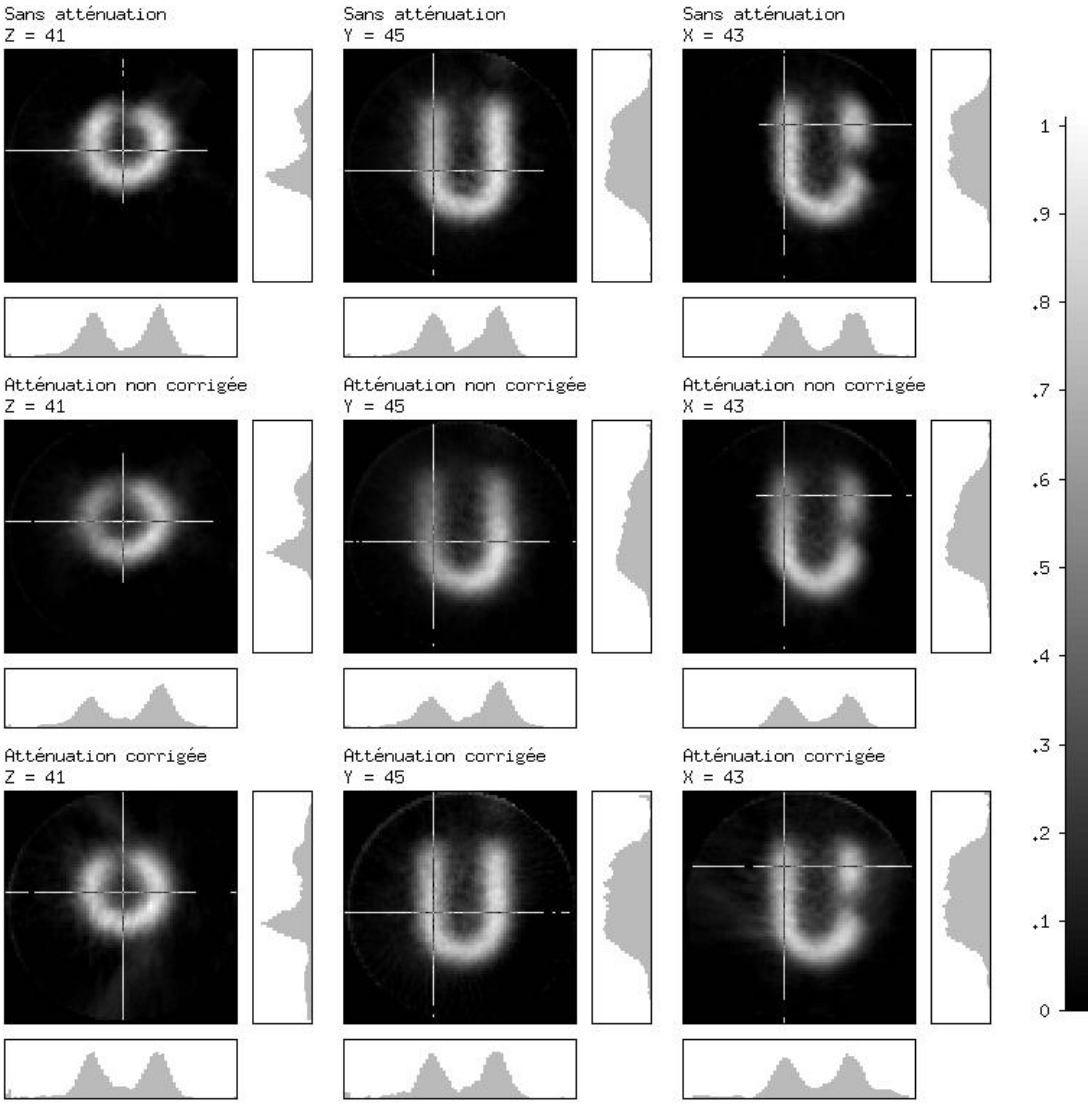


FIG. 7.8 – Résultats de reconstruction. (1ère ligne) Reconstruction à partir des données non-atténuées (expérience “cuve vide”). (2ème ligne) Reconstruction à partir des données atténuées (expérience “cuve pleine”) mais sans correction d’atténuation. (3ème ligne) Reconstruction à partir des données atténuées (expérience “cuve pleine”) avec correction d’atténuation.

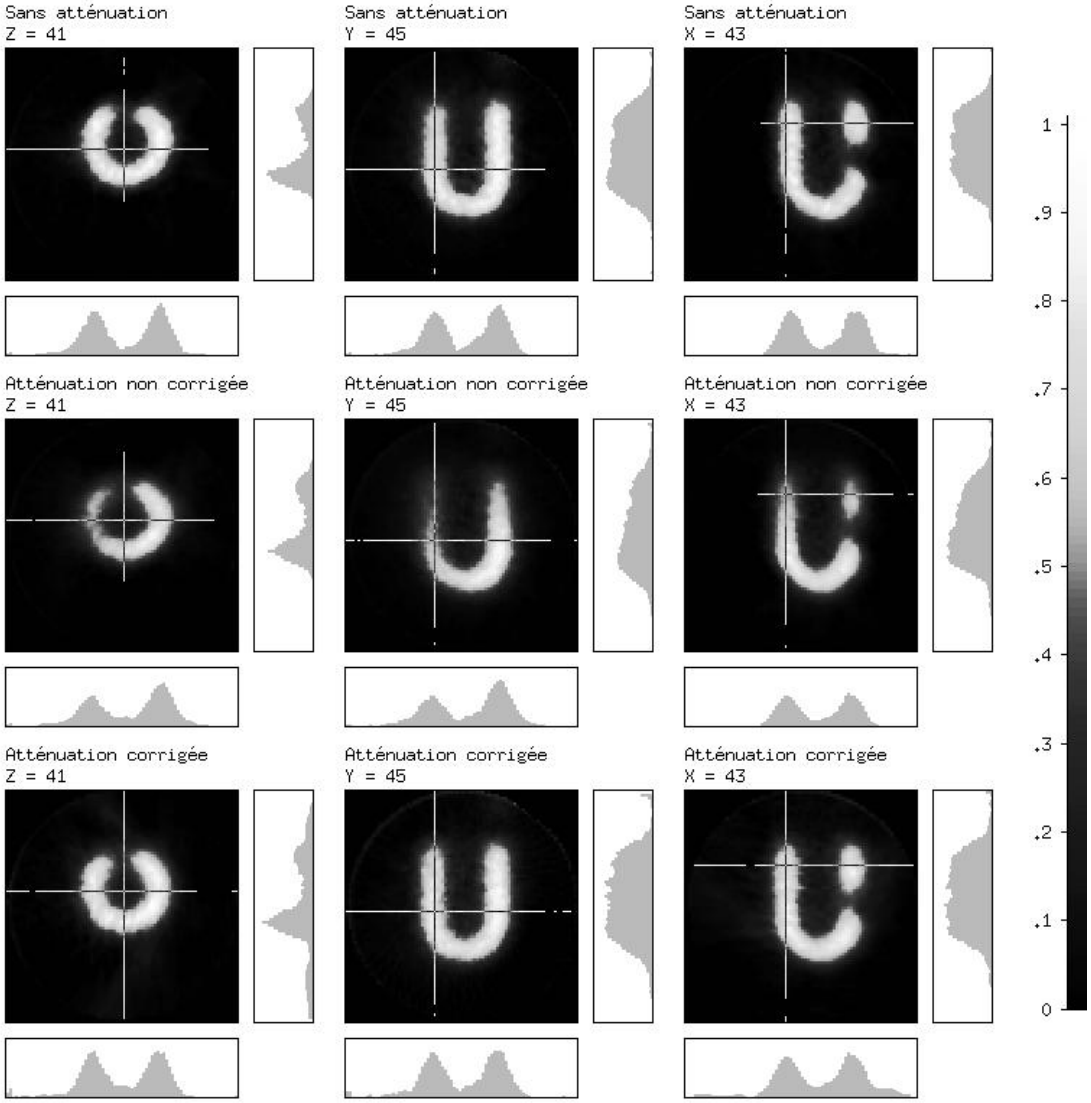


FIG. 7.9 – Résultats de reconstruction. (1ère ligne) Reconstruction à partir des données non-atténuées (expérience “cuve vide”). (2ème ligne) Reconstruction à partir des données atténuées (expérience “cuve pleine”) mais sans correction d’atténuation. (3ème ligne) Reconstruction à partir des données atténuées (expérience “cuve pleine”) avec correction d’atténuation.

de convertir les données atténuées en données exponentielles avant tout autre traitement. Nous avons déjà parlé de cette conversion à la section 2.3.2. Celle-ci est possible lorsque

1. la carte d'atténuation est connue et,
2. la carte d'atténuation est constante sur un domaine convexe contenant le support de f, f représentant la distribution spatiale de la concentration du traceur radioactif.

Dans notre expérience, nous avons fait l'hypothèse que la seconde condition était vérifiée, ce qui semble acceptable vu que le fantôme du cœur était plongé dans l'eau présentant une atténuation uniforme. La première condition n'est cependant pas satisfaite. Nous n'avons, en effet, à notre disposition que très peu d'informations sur la carte d'atténuation. Aucune mesure de transmission n'a été réalisée.

Une approche consisterait à utiliser la technique décrite dans l'article de C. Mennessier [47]. Dans cette méthode, les conditions de consistance de la transformée rayons X exponentielle sont utilisées pour déterminer les paramètres d'un ellipsoïde (centre, demi-axes, orientation et densité notée μ_0), qui simule au mieux les effets de la véritable carte d'atténuation. Ensuite, la carte d'atténuation réelle inconnue est assimilée à cet ellipsoïde et la conversion des données atténuées en données exponentielles est réalisée sur base de la connaissance des paramètres de cet ellipsoïde par la méthode décrite à la section 2.3.2. Le coefficient d'atténuation des projections parallèles exponentielles est dans ce cas égal à μ_0.

Pour la conversion de nos données atténuées, nous avons utilisé la méthode de C. Mennessier en fixant la valeur de $\mu_0 = 0.012\text{cm}^{-1}$, valeur assez proche de l'atténuation de l'eau. Pour le choix du point de départ de la minimisation (voir [47]), nous nous sommes basés sur la forme et les dimensions de la cuve cylindrique à base elliptique contenant le fantôme du cœur. Les paramètres de l'ellipsoïde que nous avons obtenus et utilisés pour la conversion de nos données atténuées sont fournis à la table 7.1. La figure 7.10 illustre trois coupes de cet ellipsoïde selon les trois directions $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ et $\underline{e}_z$. L'ellipsoïde en question est très allongé dans la direction $\underline{e}_z$, ce qui lui donne un aspect cylindrique au voisinage du fantôme. Sur cette même figure, nous avons représenté le domaine convexe Ω_f contenant f que nous avons choisi. Il s'agit d'une sphère de rayon égal à 60mm centré sur le fantôme du cœur.

μ_0	A	B	C	θ	φ	ξ
0.012mm^{-1}	136.3mm	134.4mm	1495.3mm	$-0.8°$	$-21.4°$	$-3.3°$

TAB. 7.1 – Paramètres de l'ellipsoïde ayant servi à la conversion des données atténuées. Voir annexe C.1 (figure C.1) pour la signification des différents paramètres.

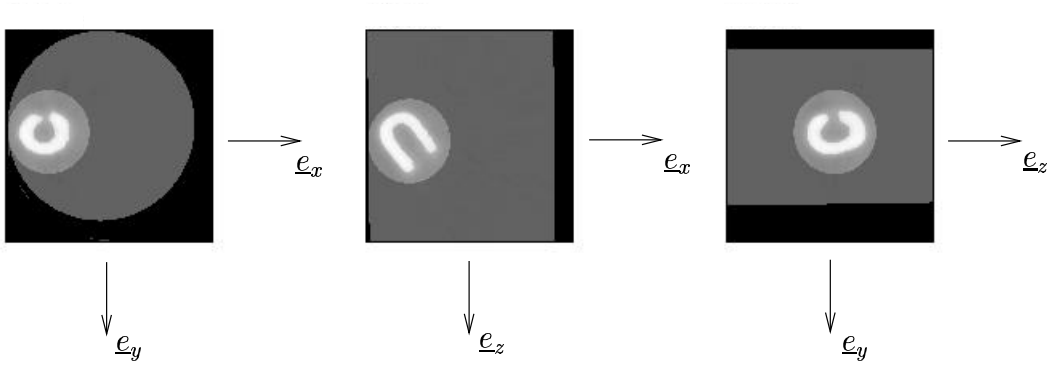


FIG. 7.10 – Représentation selon trois coupes de l'ellipsoïde utilisé pour la conversion des données atténuées en données exponentielles. Nous y avons superposé le fantôme du cœur afin de permettre une meilleure visualisation ainsi que la sphère de rayon 60mm utilisée pour le domaine convexe contenant f.

Une fois les données atténuées converties en données exponentielles, nous avons utilisé le même algorithme de reconstruction que pour les deux reconstructions précédentes mis à part le fait que le coefficient d'atténuation des projections parallèles exponentielles était fixé à $\mu_0 = 0.012\text{mm}^{-1}$. Tous les autres paramètres de la reconstruction sont restés inchangés. À nouveau, nous avons fait subir une rotation à la grille contenant la reconstruction pour faire apparaître des tranches intéressantes et les niveaux de la reconstruction ont été divisés par la valeur maximale de la reconstruction.

La troisième ligne des figures 7.8 et 7.9 montre le résultat obtenu. Cette reconstruction est de bonne qualité et présente une densité pratiquement uniforme dans les parois du cœur, montrant ainsi l'effet de la correction d'atténuation. Cette reconstruction peut être comparée à celle obtenue à partir des données non-atténuées de l'expérience "cuve vide".

Les résultats présentés dans cette section montrent le bon comportement de notre méthode d'inversion en géométrie RSH sur des projections parallèles exponentielles obtenues à partir de données réelles et confirment son utilité en imagerie SPECT 3D pour réaliser de la reconstruction avec correction d'atténuation analytique.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

L'objet de cette thèse était l'étude du problème de la reconstruction analytique d'une image tridimensionnelle à partir de projections parallèles exponentielles pour différentes géométries d'acquisition et, en particulier, pour la géométrie RSH SPECT. Son application principale est l'imagerie médicale par émission monophotonique avec correction d'atténuation analytique. L'avantage d'une approche analytique est de permettre une reconstruction plus rapide de l'image reconstruite à partir des données fournies par le scanner, but de plus en plus recherché en tomographie.

Nos recherches, basées sur une étude approfondie de la transformée de Radon exponentielle, ont aboutis à la résolution du problème d'inversion de la transformée rayons X exponentielle pour plusieurs géométries d'acquisition intéressantes dont la géométrie RSH SPECT. En guise de conclusions, il nous semble intéressant de rappeler les différentes géométries étudiées ainsi que les algorithmes de reconstruction que nous avons développés pour chacune de ces géométries.

Les premiers résultats que nous avons obtenus concernaient la transformée de Radon exponentielle et, plus particulièrement, la transformée de Radon exponentielle avec coefficient d'atténuation μ dépendant de l'angle de projection. Pour cette transformée, une formule d'inversion exacte du type rétroprojection des projections filtrées existait déjà au début de nos recherches. Une approche originale du problème d'inversion nous a permis d'obtenir une nouvelle démonstration de cette formule qui requiert des hypothèses moins restrictives sur la fonction μ que celles nécessaires aux démonstrations d'autres auteurs. Nous avons donc, à ce niveau, apporté une première contribution originale. Notre démonstration est rapportée au chapitre 2.

L'étude réalisée sur la transformée de Radon exponentielle avec atténuation dépendant de l'angle nous a permis de dériver un résultat original sur l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante. Depuis l'article de Tretiak & Metz [69] en 1980, il était considéré que l'inversion exacte de cette transformée nécessitait la connaissance des projections sur un tour complet d'acquisition. Nous

avons montré que l'on peut se limiter à un demi-tour d'acquisition, tout comme pour la transformée de Radon. Nous avons également fourni une formule d'inversion exacte et stable de la transformée de Radon exponentielle sur $180°$. Cette formule prend la forme d'une série de Neumann qui est convergente pour toute valeur du coefficient d'atténuation constant. Ces résultats, rapportés au chapitre 3, présentent un intérêt médical tout particulier : ils permettent de se limiter à l'acquisition des projections les moins atténuées et donc présentant le moins de bruit.

Une première incursion dans le problème 3D de l'inversion de la transformée rayons X exponentielle –pour laquelle quasiment aucune solution n'existait au début de nos recherches–, nous a conduit à étudier l'algorithme TTR de Ra et al. [64] pour l'inversion de la transformée rayons X pour un ensemble de projections parallèles correspondant à une union de grands cercles de la sphère unitaire. Suivant cette étude, nous avons développé l'algorithme EXP-TTR, décrit au chapitre 4, pour l'inversion de la transformée rayons X exponentielle à partir de mesures sur une union de grands cercles. Notre algorithme, dit "3D réel", est du type rétroprojection des projections filtrées. Nos recherches ont montré que les algorithmes de Hazou [31] et Weng [78], seuls résultats existant en 3D au début de nos investigations, étaient des cas particuliers de notre méthode EXP-TTR.

La suite de nos travaux a été consacrée à l'étude de la géométrie RSH SPECT, géométrie d'acquisition dont l'usage est en pleine expansion. À notre connaissance, deux scanners RSH SPECT sont actuellement en cours de développement à l'Université d'Utah et à l'Université de Caroline du Nord. La résolution du problème d'inversion de la transformée rayons X exponentielle pour cette géométrie a été abordée en deux étapes. Nous avons tout d'abord développé, au chapitre 5, une méthode de synthèse de projections parallèles exponentielles à partir de projections parallèles exponentielles correspondant à une courbe fermée sur la sphère unitaire. L'étude du comportement numérique de cette méthode nous a révélé qu'elle était particulièrement bien adaptée à un cercle de la sphère unitaire, élément de base de la trajectoire d'acquisition des projections en géométrie RSH. Nous avons également développé un algorithme permettant d'implémenter efficacement notre méthode de synthèse ; il s'agit de l'algorithme des directions ordonnées, présenté à la fin du chapitre 5. La combinaison des résultats des chapitres 3 et 5 ont conduit à l'élaboration d'une condition nécessaire et suffisante d'inversion en géométrie RSH, ainsi qu'à une formule d'inversion exacte et stable pour cette géométrie. Ces résultats sont présentés au chapitre 6. Partant de projections parallèles exponentielles sur une union de cercles sur la sphère unitaire, notre méthode consiste tout d'abord à synthétiser un nouvel ensemble de projections parallèles exponentielles correspondant à une géométrie d'acquisition 2D. Ensuite, la reconstruction 3D de la carte d'émission se fait suivant les techniques purement 2D des chapitres 2 et 3.

Au chapitre 7, notre algorithme de reconstruction en géométrie RSH a été évalué

sur données réelles. L'utilisation des projections parallèles atténuées mesurées à l'Université d'Utah nous a permis de tester notre algorithme de reconstruction et de montrer son aptitude à réaliser des reconstructions de qualité avec correction d'atténuation analytique en géométrie RSH.

Les résultats présentés dans cette thèse ont conduit aux publications suivantes : [57, 71, 72, 73, 74, 75]. À ce stade, nous notons que le problème de l'inversion exacte de la transformée rayons X exponentielle n'est pas encore résolu de manière générale. D'autres recherches sont nécessaires pour déterminer la condition sur l'ensemble Ω qui assure une reconstruction exacte et stable de la carte d'émission. Cette condition pourrait être identique à la condition d'Orlov pour l'inversion de la transformée rayons X comme semble l'indiquer notre condition nécessaire et suffisante d'inversion de la transformée rayons X exponentielle en géométrie RSH. Elle est en effet identique à la condition d'Orlov. De plus, nous avons montré que l'inversion de la transformée de Radon exponentielle avec atténuation constante était possible sur un demi-tour d'acquisition des projections, tout comme pour la transformée de Radon. Enfin, nous avons récemment présenté, en collaboration avec Frédéric Noo et Rolf Clackdoyle, un article [56] de conférence montrant qu'une inversion exacte de la transformée rayons X exponentielle est possible pour n'importe quel ensemble Ω vérifiant la condition d'Orlov, à condition que le coefficient d'atténuation constant des projections soit suffisamment petit pour un rayon de champ de vue donné. Cette condition assure la convergence d'une série de Neumann constituant la formule d'inversion. D'autres investigations sont nécessaires pour démontrer que la convergence de cette série est assurée quelle que soit la valeur du coefficient d'atténuation.

Annexe A

Formules et rappels mathématiques

A.1 Transformée de Fourier

Dans cette section, nous présentons la définition de la transformée de Fourier que nous avons utilisée tout au long de cet ouvrage. Soit f une fonction réelle, bornée et à support compact sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier de f est définie par

$$[\mathcal{F}_n f](\underline{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\underline{x}\, f(\underline{x})\, e^{-j2\pi \underline{x}.\underline{X}} \tag{A.1}$$

où $j = \sqrt{-1}$, $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ et "." représente le produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Étant données les hypothèses faites sur f, sa transformée de Fourier existe toujours.

À partir de la transformée de Fourier $[\mathcal{F}_n f]$, il est possible de reconstruire la fonction f par transformée de Fourier inverse

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{F}_n^{-1}\mathcal{F}_n f](\underline{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\underline{X}\, [\mathcal{F}_n f](\underline{X})\, e^{j2\pi \underline{x}.\underline{X}} \tag{A.2}$$

à condition que cette dernière intégrale existe.

A.2 Notions d'analyse fonctionnelle

Cette section décrit un ensemble de notions d'analyse fonctionnelle utilisées essentiellement au chapitre 3 et provenant en partie de la référence [10].

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les ensembles $L^1(E)$ et $L^2(E)$ sont appelés respectivement ensemble des fonctions intégrables et ensemble des fonctions de carré intégrable sur E.

A.2.1 Produit scalaire et norme

Soient $\psi_1, \psi_2 \in L^2(E)$. Le *produit scalaire* dans $L^2(E)$ de ψ_1 et ψ_2 est défini par

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_E d\underline{x}\, \psi_1(\underline{x})\, \psi_2^*(\underline{x}) \tag{A.3}$$

où le symbole "*" représente le complexe conjugué. Cette intégrale est bien définie puisque le produit de deux fonctions de $L^2(E)$ est une fonction de $L^1(E)$. La *norme* correspondante est alors définie par

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \left(\int_E d\underline{x}\, |\psi(\underline{x})|^2 \right)^{1/2} \tag{A.4}$$

A.2.2 Convergence d'une suite

On dit qu'une suite (ou séquence) de fonctions $\psi_n \in L^2(E)$ *converge ("fortement") vers* ψ dans $L^2(E)$ lorsque

$$\lim_{n \to +\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0 \tag{A.5}$$

D'une manière formelle, on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \psi \tag{A.6}$$

Une suite ψ_n est *de Cauchy dans* $L^2(E)$ si $\|\psi_p - \psi_q\| \to 0$ lorsque p et q tendent vers l'infini. Notons que toute suite convergente est de Cauchy.

Un espace de fonctions est un *espace de Bannach* si toute suite de Cauchy dans cet espace converge dans ce même espace. De plus, tout espace de Bannach dont la norme est induite par un produit scalaire est un *espace de Hilbert*. En particulier, l'espace $L^2(E)$ est un espace de Hilbert car toute suite de Cauchy dans $L^2(E)$ converge dans $L^2(E)$.

A.2.3 Opérateur linéaire

On appelle *opérateur linéaire sur* $L^2(E)$, une application $\psi \to K\psi$ de $L^2(E)$ dans lui-même, telle que

$$K \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \psi_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K \psi_i \tag{A.7}$$

pour toute combinaison linéaire $\sum \alpha_i \psi_i$ d'éléments de $L^2(E)$. On note encore $K : L^2(E) \to L^2(E)$.

Un opérateur linéaire K est *borné* (ou *continu*) si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|K\psi\| \leq C \|\psi\|, \quad \forall \psi \in L^2(E) \tag{A.8}$$

La *norme d'un opérateur* K borné est définie par

$$\|K\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|K\psi\|}{\|\psi\|} \tag{A.9}$$

Si la relation

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \left\langle \psi_1, K^{\#}\psi_2 \right\rangle \tag{A.10}$$

est vérifiée pour toutes fonctions $\psi_1, \psi_2 \in L^2(E)$, alors l'opérateur K est *borné* et $K^{\#}$ est appelé *opérateur adjoint* de K (théorème de Hellingter-Toeplitz, voir chapitre 10.1 dans [41]).

A.3 Théorème de Cauchy

Le théorème de Cauchy pour les fonctions d'une variable complexe z s'énonce comme suit. Si la fonction $F(z)$ est analytique à l'intérieur d'un contour C du plan complexe et se prolonge continûment sur C, alors

$$\int_C F(z)\, dz = 0 \tag{A.11}$$

En particulier, si la fonction $F(z)$ est analytique sur tout le plan complexe, alors

$$\int_C F(z)\, dz = 0 \tag{A.12}$$

pour tout contour C du plan complexe.

Annexe B

Démonstrations

B.1 Convergence de la séquence $K_n\psi = \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi)$

Afin de montrer que la suite $K_n\psi = \chi(w_n \otimes_2 \chi\psi)$ converge dans $L^2(\Omega_f)$ pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$, remarquons qu'il suffit de montrer que la séquence $Q_n\psi = \chi(v_n \otimes_2 \chi\psi)$ converge dans $L^2(\Omega_f)$ pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_f)$, la fonction $v_n(x,y)$ étant définie par

$$v_n(x,y) = \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{\overline{\mu}_0|p| \le |\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2 p^2}} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi\sigma x} \tag{B.1}$$

En effet, les différents termes apparaissant dans l'expression (3.21) de la fonction w_n correspondent tous à la fonction v_n ayant subi une rotation autour de l'origine dans le plan $\mathbb{R}^2$:

$$w_n(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{N_d} a_k\, v_n(\underline{x}.\underline{\theta}_k^{\perp}, \underline{x}.\underline{\theta}_k) \tag{B.2}$$

La séquence $K_n\psi$ convergera dans $L^2(\Omega_f)$ si chacune des sous-séquences la composant converge également. Montrons donc la convergence de la séquence $Q_n\psi$.

Démonstration. Nous écrivons tout d'abord $Q_n\psi$ sous la forme

$$Q_n\psi = Q_n^{(1)}\psi - Q_n^{(2)}\psi - Q_n^{(3)}\psi \tag{B.3}$$

avec

$$Q_n^{(i)}\psi = \chi(v_n^{(i)} \otimes_2 \chi\psi), \quad i = 1,2,3 \tag{B.4}$$

où

$$v_n^{(1)}(x,y) = \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{|\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \tag{B.5}$$

$$v_n^{(2)}(x,y) = \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2 p^2} \le |\sigma| \le \sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \tag{B.6}$$

et

$$v_n^{(3)}(x,y) = \int_{-1}^{1} dp\, e^{\mu_0 p y} \int_{|\sigma| \leq \overline{\mu}_0 |p|} d\sigma\, j\, \overline{\mu}_0\, \text{sign}(\sigma)\, e^{j2\pi x\sigma} \tag{B.7}$$

Montrons que chaque suite $Q_n^{(i)}\psi$ converge individuellement dans $L^2(\Omega_f)$.

La suite $Q_n^{(1)}\psi$ est tout d'abord considérée. Nous avons $v_n^{(1)}(x,y) = \rho(y)\, H_n(x)$ avec

$$\rho(y) = \frac{\sinh \mu_0 y}{\pi y} \tag{B.8}$$

et

$$H_n(x) = \int_{\mathbb{R}} d\sigma\, j\, \text{sign}(\sigma)\, \chi_n(\sigma)\, e^{j2\pi\sigma x} \tag{B.9}$$

où

$$\chi_n(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^2 < n^2 + \overline{\mu}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.10}$$

Posons à présent

$$\widetilde{\rho}(y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{si } |y| < 2D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.11}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \left[Q_n^{(1)}\psi\right](x,y) &= \chi(x,y) \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\, \rho(y-y') \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, H_n(x-x') \\ &\qquad \psi(x',y')\, \chi(x',y') \qquad \text{(B.12)} \\ &= \chi(x,y) \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\, \widetilde{\rho}(y-y') \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, H_n(x-x') \\ &\qquad \psi(x',y')\, \chi(x',y') \qquad \text{(B.13)} \end{aligned}$$

Vu que les fonctions $\widetilde{\rho} H_n$ et $\chi\psi$ sont toutes deux dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, le théorème de Parseval peut être appliqué pour obtenir

$$\begin{aligned} \left[Q_n^{(1)}\psi\right](x,y) &= \chi(x,y) \int_{-\infty}^{+\infty} dX \int_{-\infty}^{+\infty} dY\, [\mathcal{F}_1\widetilde{\rho}](Y)\, j\, \text{sign}(X)\, \chi_n(X) \\ &\qquad [\mathcal{F}_2(\chi\psi)](X,Y)\, e^{j2\pi(xX+yY)} \qquad \text{(B.14)} \\ &= \chi(x,y) \int_{-\infty}^{+\infty} dX \int_{-\infty}^{+\infty} dY\, \eta_n(X,Y)\, e^{j2\pi(xX+yY)} \qquad \text{(B.15)} \end{aligned}$$

où nous avons posé $\eta_n(X,Y) = j\, \text{sign}(X)\, \chi_n(X)\, [\mathcal{F}_1\widetilde{\rho}](Y)\, [\mathcal{F}_2(\chi\psi)](X,Y)$. Étant le produit de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$, nous observons que $\eta_n(X,Y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire intégrable sur $\mathbb{R}^2$. De plus, nous avons $\eta_n(X,Y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ car $\mathcal{F}_2(\chi\psi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{F}\widetilde{\rho}$ est bornée puisque $\widetilde{\rho} \in L^1(\mathbb{R})$. Dès lors, $\mathcal{F}_2\eta_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $Q_n^{(1)}\psi \in L^2(\Omega_f)$ avec

$$\left\| Q_p^{(1)}\psi - Q_q^{(1)}\psi \right\|^2 \leq \|\mathcal{F}_2\eta_p - \mathcal{F}_2\eta_q\|^2 \leq \|\eta_p - \eta_q\|^2 \tag{B.16}$$

qui tend vers zéro lorsque p et q tendent vers ∞. $Q_n^{(1)}\psi$ converge donc dans $L^2(\Omega_f)$.

Venons-en à la suite $Q_n^{(2)}\psi$. Il est aisé de voir que $v_n^{(2)}(x,y)$ est une fonction continue et que

$$\left|v_n^{(2)}(x,y)\right| \leq 2\,\overline{\mu}_0^3\, e^{\mu_0|y|}\,\frac{1}{n+\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}} \tag{B.17}$$

Dès lors,

$$\left|\left[Q_n^{(2)}\psi\right](x,y)\right| \leq \chi(x,y)\,2\,\overline{\mu}_0^3\, e^{2\mu_0 D}\,\frac{1}{n+\sqrt{n^2+\overline{\mu}_0^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,dy'\;|(\chi\psi)(x',y')| \tag{B.18}$$

et $Q_n^{(2)}\psi$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega_f)$.

Finalement, nous considérons la suite $Q_n^{(3)}\psi$. Cette suite est constante et il suffit donc de montrer que $Q_n^{(3)}\psi \in L^2(\Omega_f)$. Par définition, $v_n^{(3)}(x,y)$ est une fonction continue. Il vient

$$\left|\left[Q_n^{(3)}\psi\right](x,y)\right| \leq \chi(x,y)\left(\sup_{\underline{x}\in\Omega_f,\underline{x}'\in\Omega_f}\left|v_n^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\right|\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'dy'\;|(\chi\psi)(x',y')| \tag{B.19}$$

Donc, $Q_n^{(3)}\psi \in L^2(\Omega_f)$ car elle est bornée et à support compact dans Ω_f. ■

B.2 Calcul de la fonction $G(\psi,\omega_m,\omega_s)$

Nous proposons ici de calculer l'intégrale définissant la fonction $G(\psi,\omega_m,\omega_s)$:

$$G(\psi,\omega_m,\omega_s) = \frac{1}{2}\int_W d\omega\;|\sin(\omega-\psi)| \tag{B.20}$$

où l'ensemble d'intégration W est donné par

$$W = \left\{\omega\in[0,2\pi[\,:\quad \begin{array}{c}|\sin(\omega-\psi)|\geq\sin\omega_m\\ |\sin\omega|>\cos\omega_s\end{array}\right\} \tag{B.21}$$

L'ensemble d'intégration W peut encore s'écrire sous la forme

$$W = W'\setminus\{\omega\;:\;|\sin(\omega-\psi)|<\sin\omega_m\} \tag{B.22}$$

où

$$W' = [\frac{\pi}{2}-\omega_s\,;\,\frac{\pi}{2}+\omega_s]\cup[\frac{3\pi}{2}-\omega_s\,;\,\frac{3\pi}{2}+\omega_s] \tag{B.23}$$

Par définition, les angles ω_m et ω_s sont toujours inclus dans l'intervalle $[0,\pi/2]$. Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il est possible de limiter l'étude de la fonction $G(\psi,\omega_m,\omega_s)$ à $\psi\in[0,\pi/2]$. En effet, nous avons les relations suivantes : $G(\psi,\omega_m,\omega_s) = G(-\psi,\omega_m,\omega_s) = G(\pi-\psi,\omega_m,\omega_s)$ que nous proposons de démontrer.

Démonstration de $G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi, \omega_m, \omega_s)$

La valeur de $G(-\psi, \omega_m, \omega_s)$ est donnée par

$$G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_{W_1} d\omega \ |\sin(\omega + \psi)| \tag{B.24}$$

où

$$W_1 = W' \setminus \{\omega \ : \ |\sin(\omega + \psi)| < \sin \omega_m\} \tag{B.25}$$

Le changement de variable $\omega' = -\omega$ fournit

$$G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_{W_2} d\omega' \ |\sin(-\omega' + \psi)| \tag{B.26}$$

où

$$W_2 = W' \setminus \{\omega' \ : \ |\sin(-\omega' + \psi)| < \sin \omega_m\} \tag{B.27}$$

En utilisant la relation $|\sin(-\omega' + \psi)| = |\sin(\omega' - \psi)|$, nous observons ensuite que $G(-\psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi, \omega_m, \omega_s)$. ■

Démonstration de $G(\pi - \psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi, \omega_m, \omega_s)$

La valeur de $G(\pi - \psi, \omega_m, \omega_s)$ est donnée par

$$G(\pi - \psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_{W_3} d\omega \ |\sin(\omega - \pi + \psi)| \tag{B.28}$$

où

$$W_3 = W' \setminus \{\omega \ : \ |\sin(\omega - \pi + \psi)| < \sin \omega_m\} \tag{B.29}$$

Le changement de variable $\omega' = -\omega$ fournit

$$G(\pi - \psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_{W_4} d\omega' \ |\sin(-\omega' - \pi + \psi)| \tag{B.30}$$

où

$$W_4 = W' \setminus \{\omega' \ : \ |\sin(-\omega' - \pi + \psi)| < \sin \omega_m\} \tag{B.31}$$

En utilisant la relation $|\sin(-\omega' - \pi + \psi)| = |\sin(\omega' - \psi)|$, nous observons ensuite que $G(\pi - \psi, \omega_m, \omega_s) = G(\psi, \omega_m, \omega_s)$. ■

Mise en forme de l'intégrale définissant $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$

Nous décomposons à présent l'intervalle d'intégration en la variable ω afin de simplifier le calcul de l'intégrale. Écrivons l'expression de $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ de la manière suivante

$$G(\psi, \omega_m, \omega_s) = \frac{1}{2} \int_{W_a} d\omega \, |\sin(\omega - \psi)| + \frac{1}{2} \int_{W_b} d\omega \, |\sin(\omega - \psi)| \tag{B.32}$$

où

$$W_a = [\frac{\pi}{2} - \omega_s\,;\, \frac{\pi}{2} + \omega_s] \setminus \{\omega \,:\, |\sin(\omega - \psi)| < \sin\omega_m\} \tag{B.33}$$

et

$$W_b = [\frac{3\pi}{2} - \omega_s\,;\, \frac{3\pi}{2} + \omega_s] \setminus \{\omega \,:\, |\sin(\omega - \psi)| < \sin\omega_m\} \tag{B.34}$$

Dans la seconde intégrale, le changement de variable $\omega' = \omega + \pi$ montre que l'intégrale sur W_b est égale à l'intégrale sur W_a. Ainsi, nous pouvons écrire

$$G(\psi, \omega_m, \omega_s) = \int_{W_a} d\omega\, |\sin(\omega - \psi)| \tag{B.35}$$

Calcul de $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$

Pour ce calcul, nous partons de l'expression

$$G(\psi, \omega_m, \omega_s) = \int_{W_a} d\omega\, |\sin(\omega - \psi)| \tag{B.36}$$

où

$$W_a = [\frac{\pi}{2} - \omega_s\,;\, \frac{\pi}{2} + \omega_s] \setminus \{\omega \,:\, |\sin(\omega - \psi)| < \sin\omega_m\} \tag{B.37}$$

et nous nous limitons au cas $\psi \in [0, \pi/2]$. La difficulté majeure dans le calcul de cette intégrale est de déterminer correctement les bornes d'intégration. À la figure B.1, nous avons représenté l'ensemble $[\pi/2 - \omega_s\,,\, \pi/2 + \omega_s]$ ainsi que l'ensemble $\{\omega \,:\, |\sin(\omega - \psi)| < \sin\omega_m\}$ qui est égal à $[\psi - \omega_m\,;\, \psi + \omega_m] \bigcup [\pi + \psi - \omega_m\,;\, \pi + \psi + \omega_m]$. Lorsque ces deux ensembles ne se recouvrent pas, le domaine d'intégration W_a est égal à $[\pi/2 - \omega_s\,;\, \pi/2 + \omega_s]$. Cependant, pour certaines valeurs du triplet $(\psi, \omega_m, \omega_s)$, ces deux ensembles peuvent se recouvrir partiellement et le domaine d'intégration est plus délicat à déterminer. Plusieurs cas doivent être considérés. Tous les cas possibles sont repris à la table B.1 pour $\omega_m < \omega_s$ et à la table B.2 pour $\omega_m \geq \omega_s$.

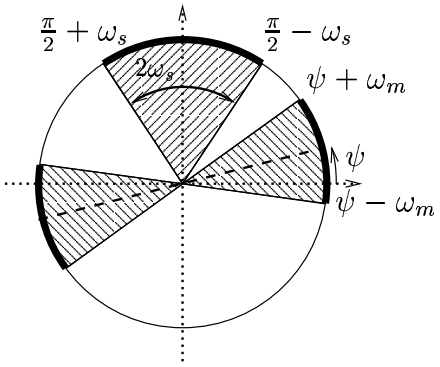


FIG. B.1 – Description des bornes d'intégration pour le calcul de $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$.

Considérons par exemple le cas I.B. Les deux ensembles se recouvrent partiellement et leur intersection doit être retirée de l'ensemble d'intégration $[\pi/2 - \omega_s\,;\, \pi/2 +$

Cas	Conditions sur ψ	Domaine d'intégration W_a
I.A	$\psi + \omega_m < \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$[\frac{\pi}{2} - \omega_s \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s \,,\, \pi + \psi - \omega_m)]$
I.B	$\psi + \omega_m \geq \frac{\pi}{2} - \omega_s$ et $\psi - \omega_m < \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$[\psi + \omega_m \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s \,,\, \pi + \psi - \omega_m)]$
I.C	$\psi + \omega_m < \frac{\pi}{2} + \omega_s$ et $\psi - \omega_m \geq \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$[\frac{\pi}{2} - \omega_s \,;\, \psi - \omega_m]$ $\cup\, [\psi + \omega_m \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s \,;\, \pi + \psi - \omega_m)]$

TAB. B.1 – Détermination du domaine d'intégration W_a pour $\omega_m < \omega_s$.

$\omega_s]$. En observant la figure B.1, nous voyons que la borne inférieure d'intégration devient $\psi + \omega_m$. La borne supérieure est égale au minimum de $\pi/2 + \omega_s$ et $\pi + \psi - \omega_m$ puisque nous devons tenir compte d'une possibilité de recouvrement des deux ensembles dans le second quadrant du cercle trigonométrique.

Dans le cas I.C, l'ensemble $\{\omega \,:\, |\sin(\omega - \psi)| < \sin\omega_m\}$ est complètement inclus dans l'ensemble $[\pi/2 - \omega_s \,;\, \pi/2 + \omega_s]$ et le domaine d'intégration W_a est coupé en deux intervalles disjoints.

Cas	Conditions sur ψ	Domaine d'intégration W_a
II.A	$\psi + \omega_m < \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$[\frac{\pi}{2} - \omega_s \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s \,,\, \pi + \psi - \omega_m)]$
II.B	$\psi + \omega_m < \frac{\pi}{2} + \omega_s$ et $\psi + \omega_m \geq \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$[\psi + \omega_m \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s \,,\, \pi + \psi - \omega_m)]$
II.C	$\psi + \omega_m \geq \frac{\pi}{2} + \omega_s$ et $\psi - \omega_m < \frac{\pi}{2} - \omega_s$	$\emptyset$

TAB. B.2 – Détermination du domaine d'intégration W_a pour $\omega_m \geq \omega_s$.

Les tables B.1 et B.2 peuvent être combinées pour obtenir la table globale B.3. Pour le cas I.C, nous avons utilisé le fait que la valeur minimale entre $\pi/2 + \omega_s$ et $\pi + \psi - \omega_m$ est toujours égale à $\pi/2 + \omega_s$.

Cas	Condition sur ψ	$\omega_m < \omega_s$	$\omega_m \geq \omega_s$
A	$\psi < \frac{\pi}{2} - \omega_s - \omega_m$	$[\frac{\pi}{2} - \omega_s \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s, \pi + \psi - \omega_m)]$	
B	$\frac{\pi}{2} - \omega_s - \omega_m \leq \psi$ et $\psi < \frac{\pi}{2} - \lvert\omega_s - \omega_m\rvert$	$[\psi + \omega_m \,;\, \min(\frac{\pi}{2} + \omega_s, \pi + \psi - \omega_m)]$	
C	$\frac{\pi}{2} - \lvert\omega_s - \omega_m\rvert \leq \psi < \frac{\pi}{2}$	$[\frac{\pi}{2} - \omega_s; \psi - \omega_m]$ $\cup [\psi + \omega_m; \frac{\pi}{2} + \omega_s]$	$\emptyset$

TAB. B.3 – Domaine d'intégration W_a.

Chaque occurrence de la fonction "minimum" dans la table B.3 fait apparaître deux cas différents. Finalement, la valeur de $G(\psi, \omega_m, \omega_s)$ est calculée en intégrant la fonction $|\sin(\omega - \psi)|$ sur le domaine d'intégration W_a fourni par la table B.3. Prenons

par exemple le cas C de cette table pour $\omega_m < \omega_s$:

$$\begin{aligned} G(\psi, \omega_m, \omega_s) &= \int_{\frac{\pi}{2}-\omega_s}^{\psi-\omega_m} d\omega \, |\sin(\omega - \psi)| + \int_{\psi+\omega_m}^{\frac{\pi}{2}+\omega_s} d\omega \, |\sin(\omega - \psi)| \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}-\omega_s}^{\psi-\omega_m} d\omega \, \sin(\omega - \psi) + \int_{\psi+\omega_m}^{\frac{\pi}{2}+\omega_s} d\omega \, \sin(\omega - \psi) \\ &= 2 \, \cos\omega_m - 2 \, \sin\psi \, \cos\omega_s \end{aligned} \tag{B.38}$$

La table 4.1 reprend les résultats complets.

Annexe C

Notes sur les tests des algorithmes

C.1 Description du fantôme utilisé pour la vérification des algorithmes

Pour vérifier nos algorithmes, nous avons défini un fantôme simplifié du cœur. Il est formé d'un empilement de 3 ellipsoïdes caractérisés chacun par une densité, dont deux représentent les ventricules. La valeur prise par le fantôme $f(\underline{x})$ en un point particulier est égale à la somme des densités associées à chacun des ellipsoïdes qui contiennent $\underline{x}$. Les paramètres des ellipsoïdes constituant notre fantôme sont donnés à la table C.1 (voir également figure C.1). La figure C.2 en illustre quelques coupes représentatives.

Centre (mm)			Demi-axes (mm)			Orientation (°)			
x_c	y_c	z_c	A	B	C	θ	φ	ξ	Densité
0.0	0.0	0.0	50.0	50.0	60.0	40.0	90.0	-120.0	1.0
-13.0	11.0	0.0	19.0	34.0	40.0	20.0	90.0	-130.0	-0.8
20.0	-16.0	0.0	14.0	37.0	40.0	20.0	90.0	-130.0	-0.8

TAB. C.1 – Définition des ellipsoïdes constituant le fantôme du cœur. Les demi-axes A, B, C sont orientés selon les directions $\underline{e}_{x''}, \underline{e}_{y''}, \underline{e}_{z''}$ de la figure C.1.

Pour simuler les projections parallèles exponentielles, nous avons implémenté directement les formules analytiques qui expriment les intégrales de ligne de $f(\underline{x})$ en fonction des paramètres géométriques des ellipsoïdes et des droites de l'espace.

C.2 Fonctions de transfert des algorithmes

En plus de vérifier nos algorithmes, nous avons estimé leur réponse fréquentielle par le biais de leur fonction de transfert. Dans la littérature, celle-ci est communément appelée *Modulation Transfert Function* (MTF) [13, 25]. Rappelons-en sa définition telle que décrite dans [25]. Appelons h_c la réponse impulsionnelle de l'algorithme au

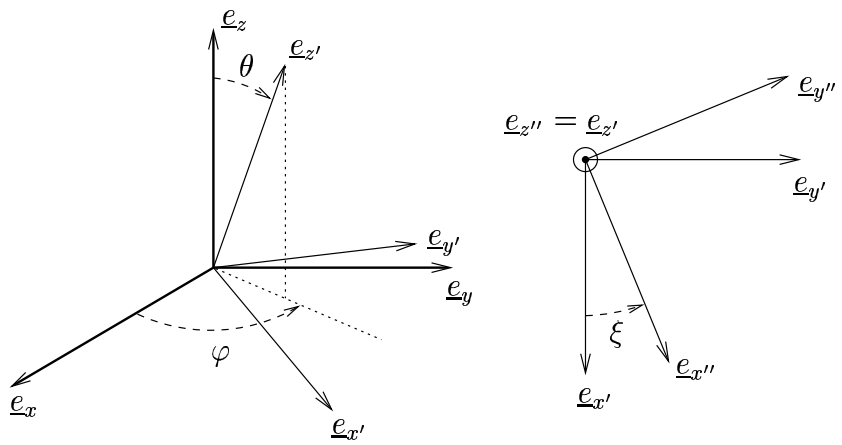


FIG. C.1 – Illustration des paramètres φ, θ et ξ d'un ellipsoïde.

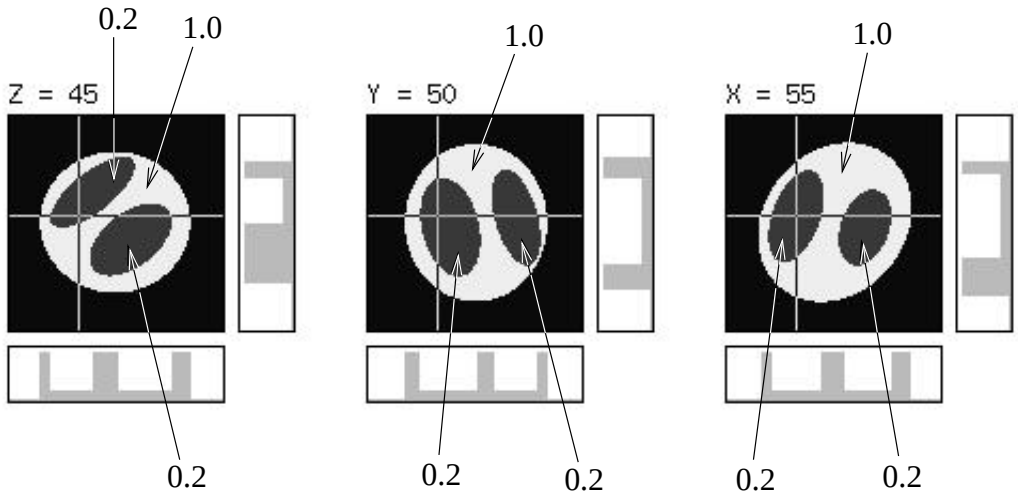


FIG. C.2 – Illustration du fantôme du cœur utilisé pour vérifier les différents algorithmes. Les parois du cœur présentent une densité de 1.0 tandis que les ventricules présentent une densité de 0.2. De gauche à droite, les coupes correspondent à $z = -9$mm (indice Z=45), $y = -1.5$mm (indice Y=50) et $x = 6$mm (indice X=55).

point C et f_c une fonction tridimensionnelle définie dans le voisinage du point C. La reconstruction de la fonction f_c par un algorithme en fournit une approximation que nous notons s_c. Les fonctions f_c et s_c sont reliées par

$$s_c = h_c \otimes_3 f_c \tag{C.1}$$

La réponse fréquentielle locale (MTF) est la transformée de Fourier 3D $[\mathcal{F}_3 h_c]$ de la réponse impulsionnelle h_c. Pour mesurer la fonction de transfert, nous devons calculer les transformées de Fourier 3D $[\mathcal{F}_3 f_c]$ et $[\mathcal{F}_3 s_c]$ pour une certaine fonction test f_c et en déterminer le quotient :

$$[\mathcal{F}_3 h_c] = \frac{[\mathcal{F}_3 s_c]}{[\mathcal{F}_3 f_c]} \tag{C.2}$$

Idéalement, on pourrait choisir pour la fonction test la distribution δ_3 de Dirac de dimension 3. Il suffirait de simuler les projections parallèles exponentielles et de calculer s_c par application de l'algorithme considéré. La transformée de Fourier 3D de s_c fournirait alors directement la MTF. Cependant, un tel choix pour la fonction test est irréalisable en pratique car les algorithmes ont été discrétisés depuis la simulation des projections jusqu'à la reconstruction proprement dite.

La solution que nous avons adoptée diffère légèrement de celle proposée dans [25]. Pour la fonction test, nous avons défini un fantôme tridimensionnel gaussien par

$$f(\underline{x}) = \exp\left(-\frac{\|\underline{x}\|^2}{2\sigma_g^2}\right) \tag{C.3}$$

Ce fantôme est **centré à l'origine** où sa valeur est égale à l'unité et décroît de manière uniforme dans toutes les directions de l'espace selon une gaussienne de variance σ_g^2. De par sa définition, il est possible de calculer les projections parallèles exponentielles de manière analytique. Il faut cependant réaliser un compromis pour le choix de σ_g car :

- Si σ_g est grand, le support du fantôme est relativement large et la reconstruction sera de bonne qualité (discrétisation suffisante), mais la transformée de Fourier 3D de f tendra rapidement vers 0 et il sera donc dangereux de l'utiliser au dénominateur des différentes MTF. En effet, la transformée de Fourier d'une gaussienne d'écart-type σ_g est une gaussienne d'écart-type $1/\sigma_g$.
- Si σ_g est petit, les projections risquent d'être mal discrétisées et la reconstruction de mauvaise qualité.

Nous avons choisi $\sigma_g = 5$mm pour la gaussienne sachant que chaque pixel d'une projection était de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$.

Pour chaque algorithme étudié, nous avons simulé un jeu de projections parallèles exponentielles de ce fantôme. Ensuite, l'application de l'algorithme correspondant a fourni une approximation de la fonction f, notée $f_a(\underline{x})$, sur une grille de voxels.

La fonction f idéale fut ensuite discrétisée sur une grille de même dimensions. Pour chaque algorithme, nous avons déterminé trois fonctions, notées MTF_x, MTF_y et MTF_z définies par

$$\mathrm{MTF}_x(\sigma) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi x\sigma}\,f_a(x,y,z)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi x\sigma}\,f(x,y,z)} \tag{C.4}$$

$$\mathrm{MTF}_y(\sigma) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi y\sigma}\,f_a(x,y,z)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi y\sigma}\,f(x,y,z)} \tag{C.5}$$

$$\mathrm{MTF}_z(\sigma) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi z\sigma}\,f_a(x,y,z)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\,e^{-j2\pi z\sigma}\,f(x,y,z)} \tag{C.6}$$

correspondant aux trois fonctions de transfert locales dans les directions $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ et $\underline{e}_z$. Ces trois fonctions sont idéalement égales à l'unité pour toute fréquence σ. Les transformées de Fourier 1D apparaissant dans ces définitions ont été calculées de manière discrète par le logiciel *Matlab*. Pour tous les algorithmes étudiés, les fonctions f et f_a ont été discrétisées sur des grilles de $100 \times 100 \times 100$ voxels de dimensions $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$. Les vecteurs dont nous devions prendre la transformée de Fourier 1D comportent donc 100 échantillons. Cependant, afin d'obtenir une meilleure résolution fréquentielle, nous avons réalisé du *zero-padding* pour obtenir des vecteurs de dimension $N = 256$. Les fréquences pour lesquelles la MTF fut évaluée sont données par

$$\sigma_i = i\,\frac{f_{ech}}{N}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{C.7}$$

où f_{ech} est la fréquence d'échantillonnage donnée ici par $f_{ech} = 1/(1.5\text{mm})$. Comme à la référence [25], nous avons choisi de normaliser l'échelle des fréquences en la multipliant par la taille d'un voxel. Dès lors,

$$\sigma_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{C.8}$$

Lorsque $i = N/2$, la fréquence obtenue correspond à la fréquence de Nyquist de l'échantillonnage qui est ici normalisée à 0.5. En raison de l'étroitesse de la gaussienne dans le domaine fréquentiel, nous avons affiché les MTF jusqu'à une valeur de σ avoisinant 0.14 selon l'algorithme considéré. Au-delà de cette fréquence, la valeur du dénominateur définissant chaque MTF présentait une valeur trop faible et le résultat était sans signification.

Bibliographie

[1] H. ANGER, *Scintillation camera with multichannel collimators*, Journal of Nuclear Medicine, 5 (1964), pp. 515–531.

[2] S. BELLINI, M. PIACENTI, C. CAFFARIO, AND F. ROCCA, *Compensation of tissue absorption in emission tomography*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-27 (1979), pp. 213–218.

[3] B. BENDRIEM AND D. TOWNSEND, *The theory and practice of 3D PET*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] A. BRONNIKOV, *Approximate reconstruction of attenuation map in SPECT imaging*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 42 (1995), pp. 1483–1488.

[5] Y. CENSOR, D. GUSTAFSON, A. LENT, AND H. TUY, *A new approach to the emission computerized tomography problem : simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients*, IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-26 (1979), pp. 2775–2779.

[6] W. CHANG, S. LIN, AND R. HENKIN, *A comparison of the performance parameters of the 7-pinhole collimator and the quadrant slant-hole collimator (QSH)*, Single Photon Emission Computed Tomography and other Selected Computer Topics, JA Sorenson (book coordinator). Society of Nuclear Medicine, (1980), pp. 113–126.

[7] ——, *A rotatable quadrant slant-hole collimator for tomography (QSH)*, Single Photon Emission Computed Tomography and other Selected Computer Topics, JA Sorenson (book coordinator). Society of Nuclear Medicine, (1980), pp. 81–94.

[8] ——, *Comparison of the system performance of the 7-pinhole and quadrant slant hole collimator*, Emission Computed Tomography : The Single Photon approach, P. Paras and E.A. Eikman (eds). US Food and Drug Administration, (1981), pp. 65–81.

[9] ——, *N-spot focal plane tomography in cardiac imaging*, Functional Mapping of Organ Systems and Other Computer Topics, PD Essers (ed). Society of Nuclear Medicine, (1981), pp. 185–196.

[10] J. CHEVALIER AND P. TOSSINGS, *Analyse fonctionnelle appliquée*, Notes de cours, Université de Liège.

[11] Z. CHO, J. RA, AND S. HILAL, *True three-dimensional reconstruction - application of algorithm towards full utilization of oblique rays*, IEEE Transactions on Medical Imaging, MI-2 (1983), pp. 6–18.

[12] R. CLACK, P. CHRISTIAN, M. DEFRISE, AND A. WELCH, *Image reconstruction for a novel SPECT system with rotating slant-hole collimators*, Conference Record 1995 IEEE Medical Imaging Conference, (1996), pp. 1948–1952.

[13] R. CLACK AND M. DEFRISE, *Overview of reconstruction algorithms for exact cone-beam tomography*, SPIE Proc. reprint from Mathematical Methods in Medical Imaging, (1994).

[14] R. CLACK, D. TOWNSEND, AND M. DEFRISE, *An algorithm for three-dimensional reconstruction incorporating cross-plane rays*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 8 (1989), pp. 32–42.

[15] E. CLARKSON, *Projections onto the range of the exponential Radon transform and reconstruction algorithms*, Inverse Problems, 15 (1999), pp. 563–571.

[16] A. CLOUGH AND H. BARRETT, *Attenuated Radon and Abel transforms*, Journal of the Optical Society of America, 39 (1980), pp. 341–354.

[17] J. COLSHER, *Fully three-dimensional positron emission tomography*, Physics in Medicine and Biology, 25 (1980), pp. 103–115.

[18] A. DE PIERRO, *Multiplicative Iterative methods in Computed tomography*, ed. G.T. Herman and A.K. Louis and F. Natterer, Mathematical Methods in Tomography (New York : Springer), 1991.

[19] M. DEFRISE, R. CLACK, AND D. TOWNSEND, *Solution to the three-dimensional image reconstruction problem from two-dimensional parallel projections*, Journal of the Optical Society of America A, 10 (1993), pp. 869–877.

[20] M. DEFRISE, S. KUIJK, AND F. DECONINCK, *A new three-dimensional reconstruction method for positron cameras using plane detectors*, Physics in Medicine and Biology, 33 (1988), pp. 43–51.

[21] M. DEFRISE, D. TOWNSEND, AND R. CLACK, *Three-dimensional image reconstruction from complete projections*, Physics in Medicine and Biology, 34 (1989), pp. 573–587.

[22] V. DICKEN, *Simultaneous activity and attenuation reconstruction in Single Photon Emission Computed Tomography, a non-linear ill-posed problem*, PhD thesis, Universitat Potsdam, Germany, 1998.

[23] R. EISNER, D. NOWAK, R. PETTIGREW, AND W. FAJMAN, *Fundamentals of 180° acquisition and reconstruction in SPECT imaging*, Journal of Nuclear Medicine, 27 (1986), pp. 1717–1728.

[24] D. FINCH AND A. HERTLE, *The exponential Radon transform*, Intregral Geometry (Bryant, Guillemin, Helgason, and Wells, Eds.), Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 63 (1987), pp. 67–73.

[25] P. GRANGEAT, P. LE MASSON, P. MELENNEC, AND P. SIRE, *Evaluation of the 3D Radon transform algorithm for cone-beam reconstruction*, Proceeding of the congress Medical Imaging V, Technical conference 1445, (1991).

[26] G. GULLBERG AND T. BUDINGER, *The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single-photon emission computed tomography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 8 (1981), pp. 142–157.

[27] G. GULLBERG, R. HUESMAN, J. MALKO, N. PELC, AND T. BUDINGER, *An attenuated projector-backprojector for iterative SPECT reconstruction*, Physics in Medicine and Biology, 30 (1985), pp. 799–816.

[28] G. GULLBERG AND G. ZENG, *Reconstruction algorithm using singular value decomposition of a discrete representation of the exponential Radon transform using natural pixels*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 41 (1994), pp. 2812–2819.

[29] G. GULLBERG, G. ZENG, F. DATZ, AND P. CHRISTIAN, *Review of convergent beam tomography in single photon emission computed tomography*, Physics in Medicine and Biology, 37 (1992), pp. 507–534.

[30] W. HAWKINS, P. LEICHNER, AND N. YANG, *The circular harmonic transform for SPECT reconstruction and boundary conditions on the Fourier transform of the sinogram*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 7 (1988), pp. 135–148.

[31] I. HAZOU AND D. SOLMON, *Inversion of the exponential X-ray transform. I : Analysis*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 10 (1988), pp. 561–574.

[32] ——, *Filtered-Backprojection and the Exponential Radon Transform*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 141 (1989), pp. 109–119.

[33] ——, *Inversion of the exponential X-ray transform. II : Numerics*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 13 (1990), pp. 205–218.

[34] T. INOUYE, K. KOSE, AND A. HASEGAWA, *Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation*, Physics in Medicine and Biology, 34 (1989), pp. 299–304.

[35] L. JOHNSON AND R. RIESS, *Numerical Analysis*, Reading, MA : Addison-Wesley, 1977.

[36] A. KAK AND M. SLANEY, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, 1988.

[37] P. KINAHAN AND J. ROGERS, *Analytic three-dimensional image reconstruction using all detected events*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 36 (1989), pp. 964–968.

[38] P. KINAHAN, J. ROGERS, R. HARROP, AND R. JOHNSON, *Three-dimensional image reconstruction in object space*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 35 (1988), pp. 635–638.

[39] K. KORAL, N. CLINTHORNE, W. ROGERS, AND J. KEYES, *Feasability of sharpening limited-angle tomography by including an orthogonal set of projections*, Nuclear Intrumenents and Methods, 193 (1982), pp. 223–227.

[40] K. KORAL, C. NOLDER, G. CILIAX, W. ROGERS, AND J. KEYES, *Simulated ECT of the Left Ventricule Using Rotating Slant-Hole Collimator and Two Camera Positions*, Journal of Nuclear Medicine, 25 (1984), pp. 343–351.

[41] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York : Wiley, 1989.

[42] P. KUCHMENT AND I. SHNEIBERG, *Some Inversion formulas in the Single Photon Emission Computed Tomography*, Applied Analysis, 53 (1994), pp. 221–231.

[43] Z. LIANG, J. YE, J. CHENG, AND D. HARRINGTON, *The inversion of the exponential Radon transform for quantitative brain SPECT*, 1996.

[44] Z. LIANG, J. YE, AND D. HARRINGTON, *An analytical approach to quantitative reconstruction of non-uniform attenuated brain SPECT*, Physics in Medicine Biology, 39 (1994), pp. 2023–2041.

[45] S. MANGLOS AND T. YOUNG, *Constrained IntraSPECT reconstruction from SPECT projections*, Conference Record 1993 IEEE Nuclear Science and Medical Imaging Conference, San Francisco, CA, (1993), pp. 1605–1609.

[46] A. MARKOE, *Fourier inversion of the attenuated X-ray transform*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 15 (1984), pp. 718–722.

[47] C. MENNESSIER, F. NOO, R. CLACK, G. BAL, AND L. DESBAT, *Attenuation correction in SPECT using consistency conditions for the exponential ray transform*, Physics in Medicine and Biology, 44 (1999), pp. 2483–2510.

[48] C. METZ AND X. PAN, *A unified analysis of exact methods of inverting the 2D exponential Radon transform, with implications for Noise Control in SPECT*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 14 (1995).

[49] G. MUEHLLEHNER, *A tomographic scintillation camera*, Physics in Medicibe and Biology, 16 (1971), pp. 87–96.

[50] ——, *Performance parameters for tomographic scintillation camera*, Tomographic Imaging in Nuclear Medicine, GS Freedman (ed). Society of Nuclear Medicine, (1973), pp. 76–83.

[51] O. NALCIOGLU, N. MILNE, AND M. MORTON, *Performance of the BICLET system*, Single Photon Emission Computed Tomography and other Selected Computer Topics, JA Sorenson (book coordinator). Society of Nuclear Medicine, (1980), pp. 73–80.

[52] F. NATTERER, *The Mathematics of Computed Tomography*, Wiley-Teubner, 1986.

[53] ——, *Determination of tissue attenuation in emission tomography of optically dense media*, Inverse Problems, 9 (1993), pp. 731–736.

[54] ——, *Inversion of the attenuated Radon transform*, Inverse Problems, 17 (2000), pp. 113–119.

[55] F. NOO, R. CLACK, AND M. DEFRISE, *Cone-beam reconstruction from general discrete vertex sets using Radon rebinning algorithms*, IEEE Transcations on Nuclear Science, 44 (1997).

[56] F. NOO, R. CLACKDOYLE, AND J. WAGNER, *3D Image Reconstruction from Exponential X-ray Projections : a Completeness Condition and an inversion Formula*, Conference Record of the 2001 IEEE Nuclear Symposium and Medical Imaging Conference, IEEE Catalog Number 0-7803-7324-3 abstract number M9C4-4, (2001).

[57] F. NOO AND J. WAGNER, *Image reconstruction in 2D SPECT with 180° acquisition*, Inverse Problems, 17 (2001), pp. 1–15.

[58] R. NOVIKOV, *An inversion formula for the attenuated x-ray transform*, Preprint CNRS, UMR 6629, Département de Mathématique, Université de Nantes, (2000).

[59] S. ORLOV, *Theory of three-dimensional reconstruction. I.Conditions of a complete set of projections*, Soviet Physics Crystallography, 20 (1975), pp. 312–314.

[60] ——, *Theory of three-dimensional reconstruction. II. The recovery operator*, Soviet Physics Crystallography, 20 (1975), pp. 701–709.

[61] V. PALAMODOV, *An inversion method for an attenuated x-ray transform*, 1996.

[62] X. PAN AND C. METZ, *Analysis of noise properties of a class of exact methods of inverting the 2D exponential Radon transform*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 14 (1995).

[63] N. PELC AND D. CHESLER, *Utilization of cross-plane rays for 3D reconstruction by filtered backprojection*, Journal of Computer Assisted Tomography, 3 (1979), pp. 385–395.

[64] J. RA, C. LIM, Z. CHO, S. HILAL, AND J. CORRELL, *A true three-dimensional reconstruction algorithm for the spherical positron emission tomograph*, Physics in Medicine and Biology, 27 (1982), pp. 37–50.

[65] J. RADON, *Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Manningfaltigkeiten*, Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys., Kl., 69 (1917), pp. 262–267.

[66] R. RAMLAU, R. CLACKDOYLE, F. NOO, AND G. BAL, *Accurate attenuation correction in SPECT imaging using optimization of bilinear functions and assuming an unknown spatially-varying attenuation distribution*, IEEE Transactions on Nuclear Science, (1999).

[67] B. SCHORR AND D. TOWNSEND, *Filters for limited-angle tomography*, Physics in Medicine and Biology, 26 (1981), pp. 305–312.

[68] C. STEARNS, C. CRAWFORD, AND H. HU, *Oversampled filters for quantitative volumetric PET reconstruction*, Physics in Medicine and Biology, 39 (1994), pp. 381–387.

[69] O. TRETIAK AND C. METZ, *The exponential Radon transform*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 39 (1980), pp. 341–354.

[70] B. TSUI, G. GULLBERG, E. EDGERTON, J. BALLARD JG, J. PERRYY JR, W. MCCARTNEY, AND J. BERG, *Correction of nonuniform attenuation in cardiac SPECT imaging*, Journal of Nuclear Medicine, 30 (1989), pp. 497–507.

[71] J. WAGNER AND F. NOO, *TTR algorithm for the inversion of the exponential x-ray transform*, Conference Record of the 2000 IEEE Nuclear Symposium and Medical Imaging Conference, (2000), pp. 15.171–15.174.

[72] ——, *Three-dimensional image reconstruction from exponential parallel-beam projections*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 48 (2001), pp. 743–749.

[73] J. WAGNER, F. NOO, AND R. CLACKDOYLE, *Exact Inversion of the Exponential X-ray transform for RSH SPECT*, Proceedings of the 2001 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, (2001).

[74] ——, *Exact Inversion of the exponential X-ray transform for RSH-SPECT*, Physics in Medicine and Biology, (to appear), (2002).

[75] J. WAGNER, F. NOO, R. CLACKDOYLE, G. BAL, AND P. CHRISTIAN, *Attenuation Correction for Rotating Slant-Hole (RSH) SPECT using Exact Rebinning*, Conference Record of the 2001 IEEE Nuclear Symposium and Medical Imaging Conference, IEEE Catalog Number 0-7803-7324-3 abstract number M8-5.

[76] Y. WANG, D. WESSEL, E. FREY, AND B. TSUI, *A 3D Filtered Back-Projection Algorithm for SPECT using a Multi-Segment Rotating Slant-Hole Collimator*, Conference Record 2000 IEEE Medical Imaging Conference.

[77] A. WELCH, R. CLACK, F. NATTERER, AND G. GULLBERG, *Toward Accurate Attenuation Correction in SPECT without transmission measurement*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 16 (1997), pp. 532–541.

[78] Y. WENG, G. ZENG, AND G. GULLBERG, *Filtered backprojection algorithms for attenuated parallel and cone-beam projections sampled on a sphere*, Three-dimensional Image Reconstruction in Radiation and Nuclear Medicine, ed. P. Grangeat and J.-L. Amans (Dordrecht : Kluwer), (1996), pp. 19–34.

[79] Y. WENG, L. ZENG, AND G. GULLBERG, *Analytical Inversion formula for uniformly attenuated fan-beam projections*, IEEE Transactions on Nuclear Science, 44 (1997), pp. 243–249.

[80] J. YOU, Z. LIANG, AND G. ZENG, *A Unified Reconstruction Framework for Both Parallel-beam and Variable Focal-Length Fan-Beam Collimators by a Cormack-Type Inversion of Exponential Radon Transform*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 18 (1999), pp. 59–65.