Formulaire

Relations trigonométriques

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \tag{1}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \tag{2}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B)) \tag{3}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B)) \tag{4}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \tag{5}$$

Transformées de FOURIER

$$\begin{array}{rcr}
rect(\frac{t}{T}) & T\, sinc(fT) & (6) \\
sinc(2Wt) & \frac{1}{2W} rect(\frac{f}{2W}) & (7) \\
e^{-at}u(t),\ a > 0 & \frac{1}{a+2\pi jf} & (8) \\
e^{-a|t|},\ a > 0 & \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} & (9) \\
e^{-\pi t^2} & e^{-\pi f^2} & (10) \\
\delta(t) & 1 & (11) \\
1 & \delta(f) & (12) \\
\delta(t - t_0) & e^{-2\pi jft_0} & (13) \\
e^{2\pi jf_ct} & \delta(f - f_c) & (14) \\
\cos(2\pi f_ct) & \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] & (15) \\
\sin(2\pi f_ct) & \frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] & (16) \\
sgn(t) & \frac{1}{\pi jf} & (17) \\
\frac{1}{\pi t} & -jsgn(f) & (18) \\
u(t) & \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi jf} & (19) \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_0) & \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_0}) & (20)
\end{array}$$

1. **[Théorie]**
   (a) Comment définit-on un canal de transmission idéal ? Commentez cette définition.
   (b) Expliquez le phénomène de *multitrajet*.

2. On désire numériser le signal suivant

$$g(t) = 1 + \cos^3(2\pi f_m t)$$

où $f_m = 10\,[kHz]$.
   (a) Calculez la transformée de FOURIER de $g(t)$.
   (b) Dessinez le spectre de la transformée de FOURIER du signal échantillonné pour une fréquence d'échantillonnage $f_s = 25\,[kHz]$ (veillez à graduer correctement l'axe des fréquences).
   Le théorème de SHANNON est-il vérifié pour cette fréquence d'échantillonnage ? Justifiez votre réponse.
   (c) Calculez la fréquence d'échantillonnage minimale de $g(t)$.
   (d) Dessinez une courbe de quantification uniforme à 8 niveaux adaptée à la dynamique de $g(t)$ en veillant à graduer correctement les axes et en attribuant un code binaire à chaque niveau de quantification.
   Calculez alors l'erreur de quantification maximale.
   (e) Si on choisit une fréquence d'échantillonnage $f_s = 80\,[kHz]$, calculez le débit binaire R_b exprimé en $[b/s]$.
   (f) En utilisant la courbe de quantification que vous avez construite au point 4 et la fréquence d'échantillonnage donnée au point 5, donnez l'onde PCM résultant de la numérisation de $g(t)$ pour les 6 premiers échantillons sachant que l'on commence la numérisation en $t = 0$.

   <u>Remarque importante :</u> les points (a), (b), (c), (d) et (e) peuvent être résolus de manière indépendante. Le point (f) nécessite la résolution du point (d).

3. **[Théorie]**
   (a) Établissez l'occupation spectrale d'un signal modulé en amplitude (signal AM classique).
   (b) Comparez transmission synchrone et transmission asynchrone.

4. Un appareil de télémesure émet des symboles à la cadence de 20.000 symboles par seconde. Les symboles émis sont choisis au sein d'un alphabet à 4 symboles : $\{A, B, C, D\}$.
Le tableau suivant donne la probabilité d'émission de chaque symbole ainsi que le code binaire qui lui est attribué :

Symbole	Probabilité	Code binaire
A	0,12	00
B	0,64	01
C	0,22	10
D	0,02	11

(a) Calculez l'entropie de cette source d'information (précisez l'unité). Celle-ci est-elle maximale ? Justifiez.

(b) Énoncez le théorème de SHANNON relatif à l'entropie. Montrez que le codage utilisé pour représenter les symboles de cette source vérifie le théorème de SHANNON.

(c) Construisez un code de HUFFMAN adapté à la source d'information de l'appareil de télémesure. Ce code est-il meilleur que le code proposé dans l'énoncé ?

(d) Calculez le débit d'information, le débit d'information redondante et le débit réel de la source.

Afin d'augmenter la robustesse de la transmission des symboles, on décide d'introduire un système de détection et, éventuellement, de correction d'erreur. Le système envisagé consiste à répéter le même symbole x fois (avec $x \geq 2$).
Par exemple, pour le symbole B, on ne transmet plus 01 mais

$$\underbrace{01\,01\,\ldots\,01}_{x \text{ fois}}$$

Aussi, pour $x = 3$ par exemple, au message $\overrightarrow{m} = (0\,1)$ correspond le mot codé $\overrightarrow{c} = (0\,1\,0\,1\,0\,1)$.

(e) Déterminez la valeur minimale de x telle que ce code puisse *détecter* et *corriger* au moins deux erreurs.

(f) Pour $x = 4$, donnez la matrice génératrice ainsi que la matrice de contrôle de parité.

(g) En prolongement du point (f), établissez une table de correction d'erreur.

(h) En utilisant cette table, détectez et corrigez les erreurs présentes dans les 4 mots codés suivants :

$$(1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0), (1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1), (0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1) \text{ et } (0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0).$$