# Formulaire

## Relations trigonométriques

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \tag{1}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \tag{2}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)) \tag{3}$$

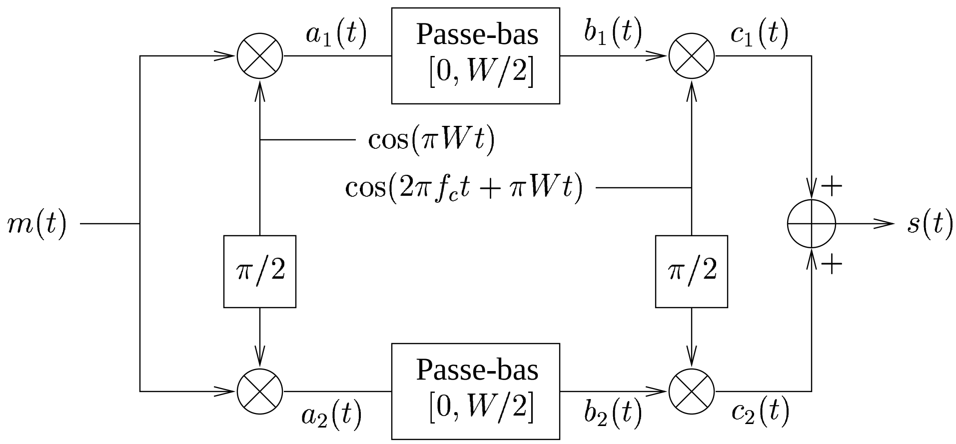
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \tag{4}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \tag{5}$$

## Transformées de FOURIER

| | | |
|---|---|---|
| $rect(\frac{t}{T})$ | $T\, sinc(fT)$ | (6) |
| $sinc(2Wt)$ | $\frac{1}{2W} rect(\frac{f}{2W})$ | (7) |
| $e^{-at}u(t),\ a > 0$ | $\frac{1}{a+2\pi jf}$ | (8) |
| $e^{-a\|t\|},\ a > 0$ | $\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$ | (9) |
| $e^{-\pi t^2}$ | $e^{-\pi f^2}$ | (10) |
| $\delta(t)$ | $1$ | (11) |
| $1$ | $\delta(f)$ | (12) |
| $\delta(t-t_0)$ | $e^{-2\pi jft_0}$ | (13) |
| $e^{2\pi jf_ct}$ | $\delta(f-f_c)$ | (14) |
| $\cos(2\pi f_ct)$ | $\frac{1}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]$ | (15) |
| $\sin(2\pi f_ct)$ | $\frac{1}{2j}[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)]$ | (16) |
| $sgn(t)$ | $\frac{1}{\pi jf}$ | (17) |
| $\frac{1}{\pi t}$ | $-jsgn(f)$ | (18) |
| $u(t)$ | $\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2\pi jf}$ | (19) |
| $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(t-iT_0)$ | $\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$ | (20) |

1. On utilise le schéma suivant pour effectuer une modulation :




$m(t)$ est le signal modulant ; sa bande de base vaut $[0, W]$.

(a) Donnez l'expression des transformées de FOURIER des signaux $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$, $c_2(t)$ et $s(t)$.

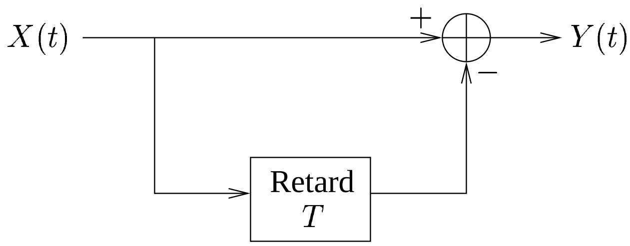
(b) Dessinez l'allure de spectre de $s(t)$.

(c) Quel est le nom exact de la technique de modulation définie par le schéma ?

2. Le processus aléatoire $X(t)$ à moyenne nulle dont la fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\Gamma_{XX}(\tau) = A^2\, e^{-2\alpha|\tau|}, \quad A > 0, \alpha > 0$$

est connu sous le nom de *signal des télégraphistes*. Ce signal est appliqué à l'entrée du circuit à retard suivant




où $Y(t)$ est le signal à la sortie du circuit.

(a) Déterminez la moyenne du processus aléatoire $Y(t)$.

(b) Déterminez la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$.

(c) Le processus $Y(t)$ est-il stationnaire ?

(d) Déterminez la densité spectrale de puissance de $Y(t)$.

3. Une antenne montée sur un satellite géostationnaire, alimentée par une puissance de $10\,[W]$, émet à une fréquence de $13\,[GHz]$. Une station terrestre équipée d'une antenne de $5\,[m]$ de diamètre est située dans l'axe du satellite à une distance de $40000\,[km]$. La puissance reçue par la station terrestre est de $25\,[pW]$. L'efficacité $\eta$ de l'antenne terrestre est de 0,59 tandis que celle du satellite est de 0,55. Pour rappel, $A_{eff} = \eta A$ où $A$ est l'aire géométrique de l'antenne.

   (a) Que signifient les initiales P.I.R.E. ?
   (b) Calculez la gain de l'antenne montée sur le satellite.
   (c) Calculez l'affaiblissement en espace libre.
   (d) Calculez le P.I.R.E.

4. On considère une transmission en bande de base utilisant un codage NRZ bipolaire. Pour cette mise en forme, la probabilité d'erreur est donnée par

$$P_e = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Dans l'état actuel du système de transmission, la probabilité d'erreur est égale à $10^{-6}$.

(a) Que devient cette probabilité si le débit binaire est doublé ?

(b) Citez 3 moyens permettant de diminuer la probabilité d'erreur obtenue en (a).

(c) Sachant que les impulsions ont une amplitude valant $\pm 1,5\,[V]$ et que la densité spectrale de puissance du bruit $N_0/2$ est égale à $10^{-5}\,[W/Hz]$, déterminez le débit binaire maximal transmissible si on impose une probabilité d'erreur maximale de $10^{-4}$.

*Remarques* :

– Les trois questions sont indépendantes.
– $\text{erfc}(u) = 1 - \text{erf}(u)$
– Utilisez une interpolation linéaire.

| $u$ | erf$(u)$ |
|---|---|
| 0,0 | 0,00000 |
| 0,5 | 0,52050 |
| 1,0 | 0,84270 |
| 1,5 | 0,96611 |
| 2,0 | 0,99532 |
| 2,5 | 0,99959 |
| 3,0 | 0,99998 |

TAB. 1 – Table de la fonction erf$(u)$.