Formulaire

Relations trigonométriques

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (1)$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (2)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B)) \quad (3)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B)) \quad (4)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \quad (5)$$

Transformées de Fourier

$$rect(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T\, sinc(fT) \quad (6)$$

$$sinc(2Wt) \leftrightarrow \frac{1}{2W}\, rect(\frac{f}{2W}) \quad (7)$$

$$e^{-at}u(t),\ a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + 2\pi jf} \quad (8)$$

$$e^{-a|t|},\ a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (9)$$

$$e^{-\pi t^2} \leftrightarrow e^{-\pi f^2} \quad (10)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (11)$$

$$1 \leftrightarrow \delta(f) \quad (12)$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-2\pi jft_0} \quad (13)$$

$$e^{2\pi jf_ct} \leftrightarrow \delta(f - f_c) \quad (14)$$

$$\cos(2\pi f_ct) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] \quad (15)$$

$$\sin(2\pi f_ct) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)\right] \quad (16)$$

$$sgn(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi jf} \quad (17)$$

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j\, sgn(f) \quad (18)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_0) \leftrightarrow \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_0}) \quad (19)$$

1. Soient deux signaux $x(t)$ et $v(t)$:

$$x(t) = 2 + \cos^2(2\pi f_2 t) \quad (20)$$
$$v(t) = 2\,\sin(2\pi f_1 t) + \cos(4\pi f_2 t) \quad (21)$$

tels que $f_1 = 800\,[Hz]$ et $f_2 = 500\,[Hz]$.

(a) **Déterminez et dessinez** les modules des transformées de FOURIER de ces signaux.

(b) Proposez une solution permettant la transmission simultanée, par modulation, des signaux $x(t)$ et $v(t)$ dans un canal de largeur $W_c = 2\,f_2$.

(c) Sachant que les signaux ne sont pas numérisés et que l'on propose deux fréquences porteuses $f_{c1} = 1,2\,[kHz]$ et $f_{c2} = 2,4\,[kHz]$, laquelle choisiriez-vous ? Donnez des raisons justifiant votre choix ?

Dans la suite de l'exercice, vous travaillerez uniquement avec le signal $x(t)$.

(d) Soit une fréquence d'échantillonnage de $2,2\,[kHz]$, pensez-vous qu'elle puisse convenir ?

(e) Choisissons une fréquence d'échantillonnage de $2,5\,[kHz]$ et un échantillonnage du signal sur 3 bits. Déterminez la courbe de quantification ainsi que le débit binaire.

(f) Donnez la borne supérieure de l'erreur de quantification.

(g) Après échantillonnage et quantification, nous obtenons la série de bits suivante :

$$1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0 \quad (22)$$

Dessinez le signal modulé en PAM-4.

(h) Comparez la bande passante d'une modulation PAM-4 et de la modulation PAM-8. En vous servant des propriétés de la transformée de Fourier, expliquez ce phénomène. (Prenez les mêmes données numériques qu'au point e).

2. **[Théorie]** Soit signal stochastique $X(t)$ supposé stationnaire au sens large ; sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale sont respectivement notés $\Gamma_{XX}(\tau)$ et $\gamma_X(f)$.
   (a) Déterminez la moyenne du signal modulé $Y(t) = X(t)\sin(2\pi f_c t)$. S'agit-il d'un signal stationnaire ? Si non, expliquez comment on stationnarise le signal.
   (b) Déterminez l'expression analytique de la fonction d'auto-corrélation et de la densité spectrale de $\gamma_Y(f)$.
   (c) Comparez les densités spectrales d'un signal modulé par un $\cos(2\pi f_c t)$ et par un $\sin(2\pi f_c t)$.

3. Dans un système, on considère que la largeur de bande de base d'un signal NRZ initial à 4 états d'amplitude vaut $\frac{0{,}3}{T}$ où T désigne la période d'un bit.
   (a) Que vaut la largeur de bande après multiplication de ce signal par $\cos(2\pi f_c t)$?
   (b) De quelle type de modulation s'agit-il exactement ?
   (c) On imagine un système fournissant les 4 états suivants :
   $A_c\cos(2\pi f_c t)$, $A_c\cos(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2})$, $A_c\cos(2\pi f_c t + \pi)$, $A_c\cos(2\pi f_c t + \frac{3\pi}{2})$
   Ces symboles sont émis à une cadence f_b.
      i. De quelle type de modulation s'agit-il ? Donnez-en le nom exact.
      ii. Quelle est la largeur de bande de ce signal ? Justifiez votre réponse.

4. Soit un signal envoyé d'une station de base vers un satellite situé à $40.000\,[km]$ de la terre. Le site d'émission utilise une antenne parabolique dont le gain maximum est de $30\,[dB]$ et dont l'efficacité vaut $0,6$. En outre, l'antenne d'émission est parfaitement alignée, tout comme l'antenne de réception. Les caractéristiques de l'antenne parabolique à bord du satellite sont les suivantes : $\theta_{3dB} = 2^o$ et efficacité de $0,58$.

   On cherche à dimensionner le système pour qu'il fonctionne dans de bonnes conditions, à une fréquence de $14\,[GHz]$. Concrètement cela signifie, entre autres, que la puissance reçue soit supérieure $0,1\,[nW]$. Les pertes dans les circuits électriques et des pertes dues au passage dans l'atmosphère seront ignorées.

   (a) Quel diamètre doit avoir l'antenne d'émission ?
   (b) Calculez le PIRE.
   (c) Calculez la puissance d'émission nécessaire en $[dBW]$ et $[dBm]$.
   (d) Que devient la puissance d'émission si on veut se prémunir d'un défaut d'alignement de 2^o de l'antenne d'émission.

   <u>Pour rappel :</u>

$$\theta_{3dB}[^\circ] = 70\,\frac{\lambda}{D} \tag{23}$$

$$G(\alpha)\,[dB] = G_{\max}[dB] - 12\left(\frac{\alpha}{\theta_{3dB}}\right)^2 \tag{24}$$

5. **[Théorie]** Cette question porte sur des aspects du réseau GSM.
   Soyez le plus complet possible et veillez à donner la signification de tous les acronymes que vous utilisez.
   (a) Expliquez le principe de l'authentification dans le réseau GSM.
   (b) Quel est le rôle du "Time Advance (TA)" ? Détaillez le principe.