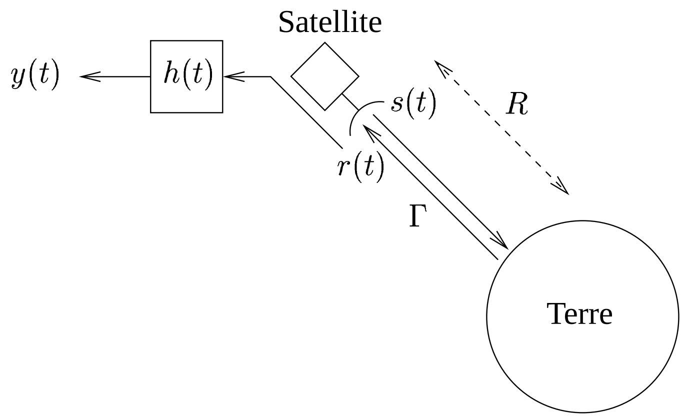
1. On dispose d'un enregistrement $\{x[0],\, x[1],\, \ldots,\, x[N-1]\}$ de durée N d'un signal aléatoire $X(t)$ stationnaire au sens large.
   Soit l'estimateur de puissance suivant

$$\widehat{P} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

   (a) Cet estimateur est-il biaisé ?
   (b) Donnez l'expression analytique de la variance de cet estimateur.
   (c) L'évaluation de la variance de l'estimateur est-elle aisée ? Commentez votre réponse.

2. Soit un radar embarqué sur un satellite et destiné à obtenir des images précises du sol terrestre. Pour y parvenir, le radar envoie des impulsions de courte durée τ_p avec une certaine fréquence de répétition. Il mesure ensuite les impulsions reçues après réflexion sur la surface terrestre. Comme le coefficient de réflexion sur la terre dépend des propriétés électromagnétiques du sol, on peut reconstituer une image de la surface.

   Le schéma général se présente comme suit :



   Enfin, les impulsions émises ont la forme

$$s(t) = \cos\left[2\pi\left(f_c t + \frac{Kt^2}{2}\right)\right] \qquad |t| \le \tau_p,\ K > 0$$

   (a) Que vaut la fréquence instantanée $f_i(t)$ du signal ? (pour rappel, $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$ où $\phi(t)$ représente l'argument du cosinus)

   (b) Dessinez l'allure de $s(t)$. Quelle est sa particularité ? Calculez ensuite son enveloppe complexe.

   (c) L'expression de l'enveloppe complexe du signal reçu est donnée par

$$e_y(t) = \Gamma\, B\, \mathrm{sinc}\left[B(t-\tau)\right]$$

   où
   - B est la bande passante du filtre utilisé,
   - Γ est l'atténuation en amplitude (supposée réelle) par rapport au signal émis et
   - τ est le délai entre émission et réception.

   Si R est la distance satellite-terre, que vaut τ ?
   Déterminez ensuite l'expression du signal reçu $y(t)$.

   (d) Déterminez l'expression du signal $r(t)$ reçu par le récepteur après réflexion sur le sol terrestre, en fonction de $s(t)$, Γ et τ.

   (e) Le signal reçu $r(t)$ est ensuite filtré par un filtre de réponse fréquentielle $\mathcal{H}(f)$. En se basant sur les enveloppes complexes du signal reçu $y(t)$ et du signal émis $s(t)$, déterminez les spectres de $\mathcal{H}(f)$ et de l'enveloppe complexe $E_{\mathcal{H}}(f)$ du filtre utilisé à la réception. On suppose que, si le gain en amplitude du filtre est $\sqrt{K}$, $K\tau_p^2 \gg 1$.

(f) Dessinez le module $\|\mathcal{H}(f)\|$ et la phase $\beta(f)$ de ce filtre. Quelle est sa particularité ?

Suggestions pour la partie (e) :

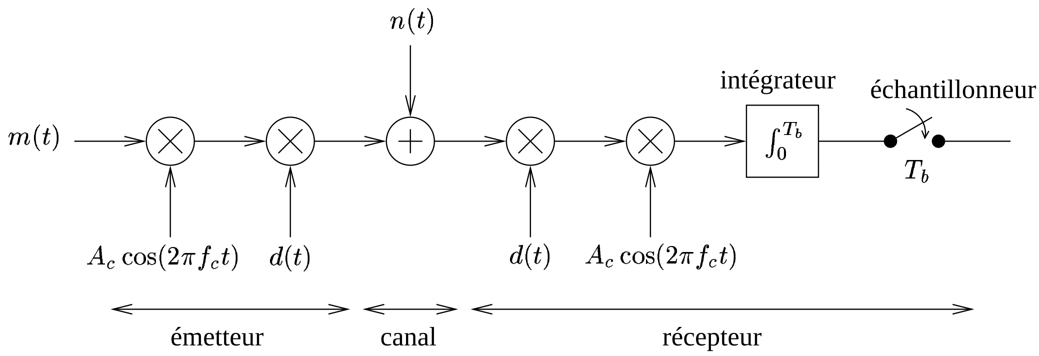
- Pensez à mettre en évidence le terme $e^{-\frac{\pi j f^2}{K}}$ lors du calcul de l'intégrale de la transformée de FOURIER.
- $\int_{-a}^{a} e^{\left[j2\pi b(t-t_f)^2\right]}dt = \frac{1}{\sqrt{b}}e^{j\frac{\pi}{4}}$ pour $ba^2 \gg 1$.

3. Considérer la modulation 2-4PSK qui correspond exactement à une modulation OQPSK sauf que la durée de l'impulsion rectangulaire de mise en forme n'est plus égale à $2T_b$ mais bien à T_b. Autrement dit, l'onde de mise en forme vaut $+V$ pour $t \in [0, T_b]$ et 0 pour $t \in]T_b, 2T_b]$.
   (a) Pour la séquence binaire $10110010110\ldots$, représentez les composantes en phase et en quadrature, l'enveloppe et la phase du signal modulé.
   (b) Représentez le plan de constellation (plan complexe de $e_s(t)$).
   (c) Que vaut la largeur de bande d'un signal modulé en OQPSK ?
   (d) Comparez la largeur de bande d'une modulation 2-4PSK à celle d'une OQPSK.
   (e) Déterminez la densité spectrale de puissance du signal modulé si les symboles ont une probabilité d'émission donnée par

$$p = 0,1\frac{|s_I(t)|}{V} + 0,4\frac{|s_Q(t)|}{V}$$

   où $s_I(t)$ et $s_Q(t)$ représentent les valeurs de la composante en phase et en quadrature des symboles transmis, respectivement.

4. On considère le système de transmission à spectre étalé représenté par le schéma suivant :



où

– $m(t)$ est le signal binaire utile. $m(t)$ est un signal NRZ d'amplitude $\pm V$; la durée d'un bit vaut $T_b = \frac{1}{f_b}$
– $A_c\cos(2\pi f_c t)$ est la porteuse
– $d(t)$ est la séquence d'étalement ; la durée d'un bit vaut $T_d = \frac{T_b}{60}$
– $n(t)$ représente un bruit additif

Cette question comporte deux parties. Il est possible de répondre à la presque totalité de la seconde partie sans avoir trouvé la réponse à la première partie.

Première partie : dans un premier temps, on cherche à trouver l'expression analytique de la densité spectrale de bruit à la sortie de l'intégrateur. Le signal de bruit vaut $n(t) = A_n\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ où Θ est une phase aléatoire de moyenne nulle.

(a) Que vaut le facteur d'étalement ?

(b) Donnez l'expression analytique du signal $v_1(t)$ à l'entrée du récepteur.

(c) Quel signal $v_2(t)$ trouve-t-on à l'entrée de l'intégrateur ?

(d) Si l'on prend $f_c = \frac{600}{T_b}$, certains termes de $v_2(t)$ auront une contribution nulle à la sortie de l'intégrateur. Quels sont ces termes ? (*Indications* : (1) pensez à développer les cosinus, (2) les termes $\cos\Theta$ et $\sin\Theta$ ne dépendent pas du temps et sont donc constants sur toute la période d'intégration)

(e) Comme toutes les opérations sont linéaires, il est possible de négliger les termes de contribution nulle dès l'entrée l'intégrateur. Que vaut donc ce signal $v_3(t)$ simplifié, tiré de l'expression de $v_2(t)$?

(f) Que est le terme d'interférence contenu dans $v_3(t)$?

(g) Que vaut la densité spectrale du terme d'interférence à l'entrée de l'intégrateur ?

(h) Que vaut la densité spectrale du terme d'interférence à la sortie de l'intégrateur ? Pour les calculs, on peut considérer que l'intégrateur agit comme un passe-bas idéal jusqu'à la fréquence f_b.

<u>Seconde partie :</u> on désire calculer la probabilité d'erreur sur bit P_e. Pour rappel, dans le cas d'une modulation BPSK classique, la probabilité d'erreur sur bit P_e vaut

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

On supposera que la densité spectrale de bruit est constante pour $|f| \leq f_b$ et vaut

$$\frac{V^2 E\left\{\cos^2 \Theta\right\}}{\alpha f_d}$$

Cette densité spectrale est nulle pour en dehors de l'intervalle $[-f_b, f_b]$. α est une constante.

(a) Calculez la valeur de P_e. (*Indication* : pensez à remplacer E_b par sa valeur)

(b) Quel gain réalise-t-on par rapport à une BPSK classique si l'on considère que Θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$?

(c) Le gain est-il dû à l'étalement ?